Note de Principes de code_Carmel temporel et multi-harmonique

LAMEL 2021/08/31

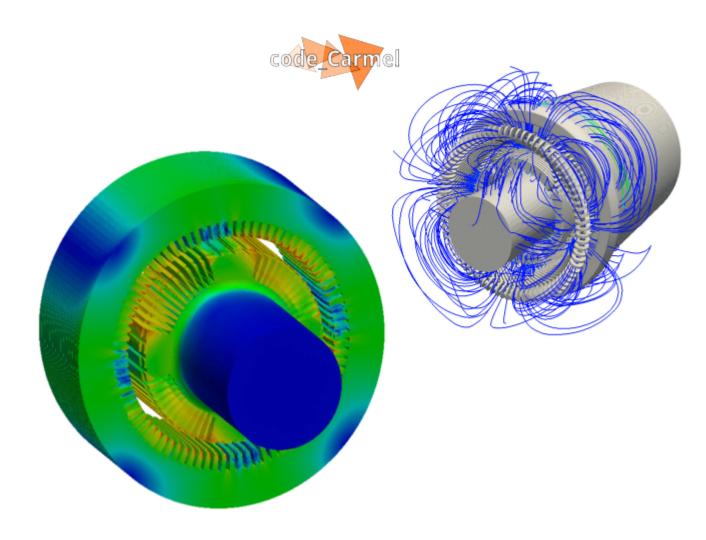


Table des matières

A	vant-	Propos	X
In	itrod	uction	xii
Li	iste d	des symboles	хv
Ι	\mathbf{M}	odélisation spécifique des problèmes d'électromagnétisme	1
1	Mis	se en équations	3
	1.1	Définition du problème	:
	1.2	Équations de Maxwell	4
	1.3	Hypothèse de l'ARQS	6
		1.3.1 Modèle électro-quasistatique	7
		1.3.2 Modèle magnéto-quasistatique	8
		1.3.3 Choix du modèle	6
	1.4	Équations aux dérivées partielles dans le domaine continu	6
		1.4.1 Problème magnétodynamique	10
		1.4.2 Problème magnétostatique	10
		1.4.3 Problème électrocinétique	10
	1.5	Lois de comportement électrique et magnétique des milieux	11
		1.5.1 Conductivité électrique	11
		1.5.2 Perméabilité magnétique	12
		1.5.2.1 Matériaux ferromagnétiques	12
		1.5.2.2 Aimants	13
	1.6	Conditions de passage aux interfaces entre les milieux	13
	1.7	Conditions aux limites	14
2	For	mulations en potentiel des équations	17
_	2.1	Problème électrocinétique	17
	2.1	2.1.1 Rappel des équations	17
		2.1.2 Formulation magnétique φ	18
		2.1.3 Formulation électrique T	19
	2.2	Problème magnétostatique	20
		2.2.1 Rappel des équations	20
		2.2.2 Formulation magnétique A	20
		2.2.3 Formulation magnétique Ω	21
	2.3	Problème magnétodynamique	22
		2.3.1 Rappel des équations	22
		2.3.2 Formulation électrique $\mathbf{A} - \varphi$	22
		2.3.3 Formulation magnétique $\mathbf{T} - \Omega$	23

3	Imp	ositio	n des grandeurs globales	25
	3.1	Introd	luction des champs K et N	25
	3.2	Introd	luction de la fonction α et du champ $\boldsymbol{\beta}$	26
	3.3	Electr	ocinétique	27
		3.3.1	Formulation en potentiel vecteur électrique ${f T}$	27
			3.3.1.1 Imposition du courant	27
			3.3.1.2 Imposition de la tension	28
		3.3.2	Formulation en potentiel scalaire électrique φ	28
			3.3.2.1 Imposition de la tension	28
			3.3.2.2 Imposition du courant	29
		3.3.3	Bilan des impositions de grandeurs globales en électrocinétique	29
	3.4	Magne	étostatique	30
		3.4.1	Formulation A	30
			3.4.1.1 Imposition d'un flux	30
			3.4.1.2 Imposition d'une différence de potentiels magnétiques	30
		3.4.2	Formulation en Ω	30
			3.4.2.1 Imposition d'un flux	30
			3.4.2.2 Imposition d'une différence de potentiels magnétiques	31
		3.4.3	Bilan des impositions de grandeurs globales en magnétostatique	31
	3.5	Magne	étodynamique	32
		3.5.1	Formulation A - φ	32
			3.5.1.1 Imposition d'une tension dans un conducteur bobiné	32
			3.5.1.2 Imposition d'un flux et d'une tension dans un conducteur massif .	32
			3.5.1.3 Imposition d'une force magnétomotrice et d'un courant électrique	
			dans un conducteur massif	33
		3.5.2	Formulation $T - \Omega$	34
			3.5.2.1 Imposition d'une force magnétomotrice et d'un courant électrique	0.4
			dans un conducteur massif	34
			3.5.2.2 Imposition d'un flux et d'une tension	34
4	Tra	itemen	nt des régions non simplement connexes	35
	4.1		ocinétique	35
	4.2		étostatique	37
		Ü	•	
5	For		ble des équations	39
	5.1	Espac	es fonctionnels	39
		5.1.1	Définitions	39
			Propriété des espaces fonctionnels continus	40
		5.1.3	Les champs électromagnétiques	41
		5.1.4	Les potentiels	41
	5.2		pes de projection	42
	5.3		ème magnétodynamique	43
		5.3.1	Formulation A - φ	43
			5.3.1.1 Projection en espace uniquement	43
			5.3.1.2 Projection en espace et en temps	45
		5.3.2	Formulation $T-\Omega$	46
			5.3.2.1 Projection en espace uniquement	46
	_		5.3.2.2 Projection en espace et en temps	48
	5.4		ème magnétostatique	48
		5.4.1	Formulation A	48
			5.4.1.1 Projection en espace uniquement	48
		٠ . ـ	5.4.1.2 Projection en espace et en temps	49
		5.4.2	Formulation Ω	49
			5.4.2.1 Projection en espace uniquement	49

T	ABLE	DES N	MATIÈRES	iii
			5.4.2.2 Projection en espace et en temps	50
	5.5	Problè	ome électrocinétique	51
	0.0	5.5.1	Formulation φ	51
		5.5.2	Formulation T	51
6			ge avec les circuits extérieurs	53
	6.1		aposition du courant source	53
	6.2		ion de circuit	54
	<i>c</i> 2	6.2.1	Expression du flux magnétique	54
	6.3		lation du problème électrique	54
		6.3.1	Méthode des courants de mailles	55
		6.3.2	Méthode de calcul de l'arbre du circuit électrique	57
II	A	.perçu	s sur les discrétisations spatiale et temporelle	59
7	Een	aces de	e discrétisation	61
•	7.1		es d'interpolation	61
	1.1	7.1.1	Généralités	61
		7.1.2	Fonctions de forme	61
		1.1.2	7.1.2.1 Fonction nodale	61
			7.1.2.2 Fonction d'arête	62
			7.1.2.3 Fonction de facette	63
			7.1.2.4 Fonction de volume	63
		7.1.3	Espaces discrets	64
		7.1.3	Potentiels	64
	7.2		teurs différentiels discrets	64
	1.4	7.2.1	Le gradient discret G_{an}	65
		7.2.1 $7.2.2$	Le rotationnel discret R_{fa}	65
		7.2.3	La divergence discrète D_{vf}	66
		7.2.4	Notion de maillage dual	66
		7.2.4 $7.2.5$	Propriétés des opérateurs	67
	7.3		étés des espaces d'interpolation	67
	7.4		tisation des champs et potentiels	69
	1.4	Discre	disation des champs et potentiels	09
8			tion des termes sources et des grandeurs globales	71
	8.1		uction d'une jauge (arbres d'arêtes et de facettes)	71
		8.1.1	Intérêt des arbres	71
		8.1.2	Construction d'un arbre de facettes	73
	8.2		tisation de K et N	76
		8.2.1	Discrétisation de N	77
		8.2.2	Discrétisation de K	79
	8.3		tisation de α et β	80
	8.4		tisation de la densité de courant d'un inducteur bobiné	80
		8.4.1	Introduction	80
		8.4.2	Discrétisation à l'aide du complexe de Whitney	80
			8.4.2.1 Matrice d'incidence	81
			8.4.2.2 Matrice de masse	81
		8.4.3	Utilisation de l'arbre de facettes	82
		8.4.4	Application à un coude de section circulaire	82
		8.4.5	Conclusion	83

9	Disc	rétisation des formulations faibles 85
	9.1	Espaces fonctionnels discrets
		9.1.1 Approximation de $H^1(\mathcal{D})$
		9.1.2 Approximation discrète de $H(\mathbf{rot}, \mathcal{D})$
		9.1.3 Approximation discrète de $H(div, \mathcal{D})$
		9.1.4 Approximation discrète de $L^2(\mathcal{D})$
		9.1.5 Prise en compte des conditions aux limites ad hoc
	9.2	Problème électrocinétique
		9.2.1 Formulation φ en tension imposée
		9.2.2 Formulation φ en courant imposé
		9.2.3 Formulation T
	9.3	Problème magnétostatique
	5.5	9.3.1 Formulation A
		9.3.2 Formulation Ω
	0.4	
	9.4	
		9.4.1.1 Formulation A - φ
		9.4.1.2 Formulation $T-\Omega$
		9.4.2 Projection en espace et en temps
	0.5	9.4.2.1 Formulation A - φ
	9.5	Discrétisation en temps
		9.5.1 Discrétisation de la forme faible
		9.5.2 Magnétodynamique
		9.5.2.1 Formulation A - φ
		9.5.2.2 Formulation $T-\Omega$
	9.6	Équations avec grandeurs globales
		9.6.1 Cas d'une tension imposée sur un conducteur bobiné
	9.7	Résolution des problèmes discrets
		9.7.1 Écriture matricielle générique
		9.7.2 Discrétisation temporelle
		9.7.2.1 Discrétisation temporelle de l'équation magnétique 98
		9.7.2.2 Discrétisation temporelle de l'équation mécanique 98
		9.7.2.3 Problème générique discrétisé en temps
H		onstruction du système matriciel 101
10	Mis	en œuvre de la méthode des Éléments finis 103
	10.1	Éléments finis employés
	10.2	Éléments de référence et fonctions de forme utilisées
		10.2.1 Cas du tétraèdre
		10.2.1.1 Élément fini P_1 de classe H^1
		10.2.1.2 Élément fini de classe \mathbf{H}_{rot}
		10.2.1.3 Élément fini de classe \mathbf{H}_{div}
		10.2.1.3.1 Cas du prisme
		10.2.1.3.2 Cas de l'hexaèdre
		10.2.2 Cas de la pyramide
		10.2.2.1 Fonctions de formes nodales
		10.2.2.2 Fonctions de formes d'arête
		10.2.2.3 Fonctions de formes de facette
		10.2.2.3.1 Approche Hiptmair
		10.2.2.3.2 Approche Whitney
		10.2.2.3.3 Comparaison des deux types de fonctions
		10.2.3 Transformation de l'élément de référence à l'élément réel (Calcul d'intégrale) 118
		10.2.0 Iranorormanon de referente de reference a referient recr (Carcur d'integrale) 110

TABLE DES MATIÈRES

	10.2.4 Calcul des intégrales élémentaires par la méthode de Gauss	119
	10.2.4.1 Cas des triangles	
	10.2.4.2 Cas des rectangles	
	10.2.4.3 Cas des tétraèdres	
	10.2.4.4 Cas des prismes	
	10.2.4.5 Cas des hexaèdres	
	10.2.4.6 Cas des pyramides	
	10.2.4.0 Cas des pyramides	145
11 Nu	mérotation des inconnues	125
	Principe générale de la numérotation	
	11.1.1 Numérotation pour code_Carmel temporel	
	11.1.2 Numérotation pour code_Carmel spectral	
11.2	Traitement des conditions aux limites	
	Traitement des conditions de périodicité	
	Traitement des grandeurs globales	
	Transcriber des grandents grooties 111111111111111111111111111111111111	
12 Ass	emblage	127
12.1	Principe général de l'assemblage	127
12.2	Matrice globale en électrocinétique	127
	12.2.1 Formulation φ en tension imposée	
	12.2.2 Formulation φ en courant imposé	
	12.2.3 Formulation en T	
12.3	Matrice globale en magnétostatique - Cas temporel	
	12.3.1 Formulation en potentiel vecteur magnétique	
	12.3.2 Formulation en potentiel scalaire magnétique	
12.4	Matrice globale en magnétostatique - Cas harmonique	
	12.4.1 Formulation en potentiel vecteur magnétique	
	12.4.2 Formulation en potentiel scalaire magnétique	
12.5	Matrice globale en magnétodynamique - Cas temporel	
	12.5.1 Formulation en potentiel vecteur magnétique	
	12.5.2 Formulation en potentiel scalaire magnétique	
12.6	Matrice globale en magnétodynamique - Cas harmonique	
	12.6.1 Formulation en potentiel vecteur magnétique	
	12.6.2 Formulation en potentiel scalaire magnétique	
12.7	Traitement des grandeurs globales	
	12.7.1 Magnétodynamique	
	12.7.1.1 Imposition d'une tension sur un conducteur bobiné	
12.8	Couplage avec un circuit extérieur	
	12.8.1 Décomposition du courant source	
	12.8.2 Équation de circuit	
		131
		132
12.9		133
	r i i i i i i i i i i i i i i i i i i i	
		135
13.1	Principe général	135
		137
	13.2.1 Disposition du maillage avec la méthode du pas bloqué	137
		138
		138
		138
		139
13.3		140
	13.3.1 Disposition du maillage avec la méthode overlapping	140

		13.3.2 Extension des fonctions de forme nodale sur \mathcal{D}_{θ}	10
		13.3.3 Élément de référence overlapping	10
		13.3.4 Gestion des inconnues d'arêtes	2
		13.3.5 Écriture du système total avec la méthode overlapping	2
	13.4	Méthode spécifique pour la version spectrale	3
	13.5	Couplage cinématique	3
		13.5.1 Mise en équation du problème physique	13
		13.5.2 Traitement	
		13.5.3 Couplage faible de l'équation magnétique avec l'équation mécanique 14	
14		tement des non-linéarités 14	
	14.1	Point fixe	
		14.1.1 Description de la méthode	
		14.1.2 Schéma et solutions approchées du point fixe	
		14.1.3 Étude de convergence	-
		14.1.4 Avantages et inconvénients	
	14.2	Newton-Raphson	
		14.2.1 Description de la méthode	8
		14.2.2 Étude de la convergence	18
		14.2.3 Exemple magnétostatique	18
		14.2.4 Avantages et inconvénients	0
	14.3	Résolution du problème non linéaire	0
		14.3.1 Résolution numérique par la méthode du point fixe	1
		14.3.2 Résolution numérique par la méthode de Nexton-Raphson	i2
		14.3.3 Schéma de résolution global	53
		14.3.4 Système matriciel en magnétostatique	3
		14.3.4.1 Formulation en potentiel vecteur magnétique	
		14.3.5 Système matriciel en magnétodynamique	
		14.3.5.1 Formulation en potentiel vecteur magnétique	
	14.4	Résolution du problème non linéaire	
ΙV	7 F	Résolution du système matriciel 15	7
			•
15		olution du système linéaire 15	-
	15.1	Généralités sur les systèmes linéaires	
		15.1.1 Coûts calculs des simulations en physique des champs	
		15.1.2 Deux familles de méthodes pour résoudre un système linéaire 16	
		15.1.3 Solutions proposées par code_Carmel	
	15.2	Méthodes itératives de type Gradient Conjugué (GC)	i2
		15.2.1 Le principe	i2
		15.2.1.1 Positionnement du problème	i2
		15.2.1.2 Steepest Descent	i 4
		15.2.1.3 Principe du Gradient Conjugué	i5
		15.2.1.4 Algorithme du Gradient Conjugué	6
		15.2.2 Le Gradient Conjugué PréConditionné (GCPC)	8
		15.2.2.1 Principes	8
		15.2.2.2 Algorithme du GCPC	69
		15.2.2.3 GCPC implanté dans code_Carmel	
		15.2.3 Palette de préconditionneurs disponibles dans code_Carmel	
		15.2.3.1 Préconditionneur de Jacobi	
		15.2.3.2 Préconditionneur de Crout	
			-
		15.2.3.3 Préconditionneur MUMPS	' 5

TA	RLF	DES	MA	TIERE	C

TA	BLE	DES M	IATIÈRES	vii
		15.3.1	Le principe	176
			15.3.1.1 Factorisation	176
			15.3.1.2 Descente-Remontée	177
		15.3.2	Les différentes approches	178
				179
				181
		15.3.5	Le produit MUMPS	181
			15.3.5.1 Historique	181
			15.3.5.2 Principales caractéristiques de MUMPS	183
				184
				184
			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	186
				186
			15.3.5.3.4 Gestion mémoire	188
				189
		15.3.6	<u> </u>	190
				190
			15.3.6.2 Choix ergonomiques	
				191
			·	192
	15.4		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	192
				193
				193
				194
				195
16	Disc	rétisat	ion temporelle 1	97
	16.1	Cas par	rticulier du problème harmonique	197
V	E	xploita	ation des résultats 1	99
17	Calo	culs des	s forces 2	201
	17.1	Méthod	de du tenseur de Maxwell	201
				201
		17.1.2	Discrétisation	202
	17.2	Méthod	de des travaux virtuels	203
		17.2.1	Principe	203
		17.2.2	Discrétisation	204
			17.2.2.1 Dérivée locale de l'énergie magnétique	205
				205
				206
18	Calc	ul des	flux magnétiques locaux 2	209
10				209
				209
				210

19	Calo	cul des pertes fer	215
	19.1	Les matériaux magnétiques	215
		19.1.1 Grandeurs magnétiques	215
		19.1.2 Classification des matériaux magnétiques	217
		19.1.2.1 Le diamagnétisme	217
		19.1.2.2 Le paramagnétisme	217
		19.1.2.3 Le ferromagnétisme	
		19.1.3 Configuration en domaines magnétiques	
		19.1.3.1 Domaines de Weiss	
		19.1.3.1.1 L'énergie d'anisotropie	
		19.1.3.1.2 L'énergie magnétostatique	
		19.1.3.2 Parois de Bloch	
		19.1.4 Processus d'aimantation	
	10.0	19.1.4.1 Courbe de première aimantation	
	19.2	Les pertes magnétiques	
		19.2.1 Les pertes par hystérésis	
		19.2.2 Les pertes par courants induits	
		19.2.3 Les pertes excédentaires	
	10.2	19.2.4 Pertes en champ rotationnel	
	19.3	Description de la procédure de calcul des pertes fer	220
20	Poir	nts explorateurs	231
		•	231
		20.1.1 Méthode des fonctions nodales	232
		20.1.2 Méthode de la matrice jacobienne	232
		20.1.3 Méthode des coordonnées barycentriques	
	20.2	Tétraèdres	
		20.2.1 Méthode des fonctions nodales	235
		20.2.2 Méthode de la matrice jacobienne	235
		20.2.3 Méthode des coordonnées barycentriques	235
		20.2.4 Preuve de l'équivalence des deux dernières méthodes	236
	20.3	Prismes	237
		20.3.1 Méthode des fonctions nodales	237
		20.3.2 Méthode de la matrice jacobienne	
		20.3.3 Méthode des coordonnées barycentriques	240
\mathbf{V}	I A	Annexes	251
	_		
A	Doc	numents de référence	253
В	L'ap	oproximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)	255
	B.1	Analyse des constantes de temps	255
\mathbf{C}	Con	dition de Jauge U.w	257
\mathbf{D}	Inté	gration des éléments Overlapping dans code_Carmel	259
		Présentation de l'Overélément	259
		D.1.1 Élément de référence	259
		D.1.2 Fonctions de formes nodales	261
		D.1.3 Fonctions de formes d'arête	261
		D.1.4 Points de Gauss	262

TABLE DES MATIÈRES

٠	
1	v

${f E}$		se en compte de la non linéarité	265
	E.1	Loi de comportement non linéaire	265
	E.2	Calcul de la Jacobiennne	265
	E.3	Décomposition des opérateurs en partie linéaire et non linéaire	267
\mathbf{F}	Mod	dèle discret à partir des matrices d'incidence	269
	F.1	Opérateur différentiels discrets	269
		F.1.1 Incidence noeud-arête	269
		F.1.2 Incidence arête-facette	270
		F.1.3 Incidence facette-élément	271
		F.1.4 Propriétés	271
	F.2	Maillage dual	
		F.2.1 Définitions	
		F.2.2 Propriétés	
	F.3	Équations de Maxwell discrètes	
	F.4	Discrétisation des lois de comportement	
	F.5	Formulations discrètes	
		F.5.1 Discrétisation de la densité de courant	
		F.5.2 Problème magnétodynamique	
		F.5.2.1 Formulation électrique A - φ	
		F.5.2.2 Formulation électrique $T - \Omega$	
		F.5.3 Problème magnétostatique	
		F.5.4 Problème électrocinétique	
	F.6	Discrétisation temporelle	
	G.1 G.2	ermination de champs à rotationnel ou divergence donnée Arbre d'arêtes	285
Н	For	mulation A - φ	289
Ι	Rec	herche de l'élément contenant un point dans code_Carmel	291
J	Libi	rairies d'algèbre linéaire	293
	J.1		293
	· · ·	J.1.1 Gestion de la perte de maîtrise	
		J.1.2 Une offre riche en librairies d'algèbre linéaire	
	J.2	Annexe : Compléments théoriques	295
		J.2.1 Espaces de Krylov	295
		J.2.2 Orthogonalité	
		J.2.3 Convergence	
		J.2.4 Couts calcul et mémoire	298
	J.3	Annexe : Stratégies de résolution en non-linéaire	299
		J.3.1 Constructions du préconditionneur	299
K	Cop	pyright du produit MUMPS	301
${f L}$	Page	sage de l'élément réel à l'élément de référence	303
ш	L.1	Cas du tétraèdre	303
	コッソー	Fonction d'approximation nodales	
	L.2 L.3	Fonction d'approximation nodales	
	L.3	Fonctions d'approximation d'arête	303 304 304
		**	304 304

M C	omplém	ents pour le calcul des forces et du couple	305
M	I.1 Tenser	ur de Maxwell	305
	M.1.1	Cas général	305
	M.1.2	Cas bidimensionnel	306
M	I.2 Métho	ode des travaux virtuels	306
	M.2.1	Dérivée de l'énergie magnétique (formulation en potentiel vecteur	306
	M.2.2	Dérivée de la co-énergie magnétique (formulation en potentiel scalaire	307
	M.2.3	Calcul de la dérivée de la matrice J'	308
	M.2.4	Cas bidimensionnel	308
Inde	x		309

Avant-Propos

La maîtrise du comportement en exploitation des machines électriques : transformateurs, alternateurs, moteurs . . . est une préoccupation capitale d'EDF et des constructeurs ou exploitants de machines électriques en général.

Ces dispositifs doivent répondre à un cahier des charges précis en fonctionnement normal lors de leur première mise en œuvre. Mais le matériel subit des modifications au cours de sa vie et les contraintes de fonctionnement peuvent évoluer (grid code en 2017, par exemple). Il est souvent utile alors de pouvoir apprécier leur comportement en régime anormal (nouvelles prescriptions) ou exceptionnel (défauts).

Ces préoccupations s'appliquent à une très large gamme de "matériels" :

- alternateurs à pôles lisses;
- alternateurs à pôles saillants;
- moteurs asynchrones;
- transformateurs;
- dispositifs de diagnostic;
- compatibilité électromagnétique;
- effets du champ magnétique sur le corps humain ...

Pendant longtemps, l'analyse du fonctionnement reposait essentiellement sur des essais et des calculs appliqués à des géométries simples. Aujourd'hui, en complément, la modélisation électromagnétique fournit un moyen d'investigation puissant pour mieux appréhender les problèmes rencontrés. La démarche de modélisation permettant d'obtenir de tels modèles consiste tout d'abord à définir un ensemble d'équations permettant de décrire localement le champ électromagnétique. Ces équations sont basées sur les équations de Maxwell couplées à des lois décrivant le comportement des matériaux. Puis, ces équations sont mises en forme pour pouvoir appliquer des techniques de résolutions éprouvées. Enfin, les résultats sont mis en forme pour raisonner sur les grandeurs familières de l'électrotechnique.

Le Laboratoire d'Électrotechnique et d'Électronique de Puissance de Lille (L2EP) et le département ERMES (ex-THEMIS) d'EDF R&D co-développent code_Carmel. Il s'agit d'un logiciel de calcul tridimensionnel de champs électromagnétiques basé sur la méthode des éléments finis. Il est tout particulièrement adapté à l'étude des machines électriques en régime transitoire (dans sa version temporelle) ou en régime permanent (dans sa version multi-harmonique).

Ainsi, plus particulièrement, ce document vise à synthétiser les approches spectrales dédiées à la résolution spécifique de problèmes d'électromagnétisme transitoire, avec mouvement et à paramètres aléatoires. En particulier, il formalise l'écriture générale de la représentation spectrale de la dimension temporelle en considérant non plus une base harmonique (adaptée aux problèmes périodiques) mais aussi des bases polynomiales (traitement des grandeurs non périodiques). De plus, il généralise la méthode Spectral Stochastic Finite Element Method (SSFEM) permettant de prendre en compte les incertitudes des lois de comportement pour des problèmes magnétoharmoniques linéaires avec mouvement.

Ce document présente en détail les équations traitées par les logiciels code_Carmel et la manière de les résoudre par une méthode basée sur les éléments finis. Il ne s'agit pas d'un cours d'électromagnétisme ni d'un cours sur les éléments finis. Il suppose des connaissances basiques sur les phénomènes électromagnétiques et sur les méthodes numériques en général.

Quelques conventions de notation doivent être précisées au préalable. Un champ de vecteur sera noté en gras, par exemple ${\bf B}$ représentera le champ du vecteur induction sur tout le domaine d'étude. Une matrice de dimension n x m sera notée en gras, soulignée. De préférence quand n sera égal à 1, la matrice 1 x n (i.e. vecteur) sera notée par une lettre minuscule et par une lettre majuscule dans le cas contraire.

Introduction xiii

Introduction

Pour pouvoir étudier le comportement interne de la structure électromagnétique d'un dispositif électrique, on a recours à la modélisation numérique [Vérité et al 2007]. La modélisation consiste à établir une structure mathématique qui décrit les phénomènes physiques. Les équations de Maxwell, qui regroupent le théorème d'Ampère, la loi de Faraday, les lois de Gauss, magnétiques et électriques, associées aux lois de comportement des différents milieux et aux conditions aux limites, constituent le modèle mathématique.

La résolution d'un tel modèle consiste à rechercher les évolutions spatiale et temporelle des champs magnétiques et électriques. Pour modéliser des systèmes complexes, la méthode des éléments finis est généralement utilisée. Une discrétisation spatiale et temporelle du domaine d'étude est alors réalisée. Les champs magnétiques et électriques sont ainsi représentés sur des éléments du maillage. Pour accomplir ce travail, l'Université des Sciences et Technologies de Lille a conçu le logiciel code_Carmel.

EDF R&D a souhaité mieux maîtriser ses outils de calcul de champs électromagnétiques. Le logiciel code_Carmel a été retenu et il a été décidé de le co-développer en partenariat avec l'Université de Lille 1 dans le cadre du Laboratoire de Modélisation du Matériel Électrique (LAMEL).

Les méthodes de référence pour résoudre un problème magnétodynamique sont les méthodes d'intégration pas à pas dans le temps. Elles sont robustes et faciles à mettre en œuvre. Néanmoins, leur grande précision est obtenue avec des temps de calcul parfois très lourds, réduisant leur champ d'application.

Elles sont d'autant plus coûteuses que les grandeurs d'intérêt sont calculées sur plusieurs périodes pour atteindre le régime stabilisé. Le principe des approches spectrales consiste à représenter l'opérateur(s) du système physique comme une combinaison linéaire des fonctions prédéfinies (sur lesquelles l'opérateur(s) est simple à calculer). On construit ainsi une approximation de la solution recherchée sur une base, de taille finie et relativement petite, de fonctions judicieusement choisies. A cette fin, les méthodes spectrales (ou multi-harmoniques) sont des outils adaptés.

Le document présent a été rédigé principalement d'après la bibliographie existante au sein du LAMEL (la liste figure en annexe A). Cette bibliographie est complétée par des références plus spécifiques lorsque nécessaire.

Ce document décrit les principes de fonctionnement du logiciel code_Carmel dans ses versions temporelle et multi-harmonique (les restrictions à l'une ou l'autre version sont indiquées dans le texte). Il expose les équations électromagnétiques utilisées, leur discrétisation nécessaire pour pouvoir se servir de la méthode des éléments finis ainsi que les méthodes employées pour résoudre les problèmes mathématiques qui se posent.

Avec une nomenclature pour uniformiser la notation des symboles utilisés, le document a été découpé en cinq parties :

- 1. La modélisation spécifique des équations à résoudre (les équations physiques et la prise en compte de grandeurs globales et/ou du mouvement ...);
- 2. La discrétisation en temps et en espace;
- 3. La construction du système matriciel;
- 4. La résolution du problème linéaire et/ou non-linéaire ;
- 5. Les exploitations des résultats spécifiques comme les points explorateurs ou les pertes fer.

xiv

Liste des symboles

Notations liées au domaine continu

 $H^1(\mathcal{D})$

$a\cdot b$	Produit scalaire des vecteurs \boldsymbol{a} et \boldsymbol{b} (produit contracté)
$m{a} imes m{b}$	Produit vectoriel des vecteurs \boldsymbol{a} et \boldsymbol{b}
$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{rot},\mathcal{D})$	Espace des fonctions dont le rotationnel appartient à $\boldsymbol{L}^2(\mathcal{D})$
$m{H}_0(m{rot},\mathcal{D})$	Espace des fonctions $H(rot, \mathcal{D})$ satisfaisant une condition au bord de type Dirichlet homogène sur la composante tangentielle
$oldsymbol{L}^2(\mathcal{D})$	Espace des fonctions vectorielles définies sur $\mathcal D$ de carré sommable
div	Opérateur divergence
Γ	Frontière du domaine \mathcal{D} $(\partial \mathcal{D})$
Γ_B	Frontière du domaine $\mathcal D$ où sont imposées des conditions de la forme $m n \cdot m B = m 0$
Γ_c	Frontière du domaine conducteur \mathcal{D}_c $(\partial \mathcal{D}_c)$
Γ_E	Frontière du domaine ${\mathcal D}$ où sont imposées des conditions de la forme ${\pmb n} \wedge {\pmb E} = {\pmb 0}$
Γ_H	Frontière du domaine $\mathcal D$ où sont imposées des conditions de la forme $m n \wedge m H = m 0$
Γ_i^s	Frontière de l'inducteur i
Γ_J	Frontière du domaine $\mathcal D$ où sont imposées des conditions de la forme $n \cdot B = \mathbf 0$
$\langle\cdot \cdot angle_{\mathcal{D}}$	Produit scalaire sur $\mathcal{D}: (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \langle \mathbf{x} \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{D}} = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{x} . \mathbf{y}$
dl	Vecteur unitaire tangent à une courbe
grad	Opérateur gradient
\mathbf{n}	Vecteur unitaire normal à une surface
\mathbf{rot}	Opérateur rotationnel
\mathcal{D}	Domaine d'étude spatial
\mathcal{D}_s^i	Inducteur de type bobiné ou barre (où le courant source est imposé)
\mathcal{D}_c	Domaine conducteur
\mathcal{D}_s	Domaine source (ensemble des bobines ou barres) $\mathcal{D}_s = \cup_i \mathcal{D}_s^i$
\mathcal{D}_{nc}	Domaine non-conducteur ou isolant $(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_c)$
\mathcal{T}	Domaine d'étude temporel
$\mathit{H}(\mathit{div},\mathcal{D})$	Espace des fonctions de $L^2(\mathcal{D})$ dont la divergence appartient à $L^2(\mathcal{D})$

Espace de Sobolev des fonctions scalaires dont la dérivée appartient à $L^2(D)$

xvi Liste des symboles

 $H_0^1(\mathcal{D})$ Espace de Sobolev des fonctions appartenant à $H^1(\mathcal{D})$ satisfaisant une condition au bord de type Dirichlet homogène $H_0(div, \mathcal{D})$ Espace des fonctions de $H(div, \mathcal{D})$ satisfaisant une condition au bord de type Dirichlet homogène sur la composante normale $L^2(\mathcal{D})$ Espace des fonctions scalaires définies sur $\mathcal D$ de carré sommable | . | Valeur absolue $\|\cdot\|_2$ Norme euclidienne Norme $L^{2}(\mathcal{D})$ induite par le produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{D}} : \mathbf{x} \mapsto \langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle_{\mathcal{D}}^{1/2}$ $\|\cdot\|_{L^2(\mathcal{D})}$ Espace des fonctions $H(\mathbf{grad}, \mathcal{D})$ satisfaisant une condition au bord de type $H_{0,x}\left(\mathbf{grad},\mathcal{D}\right)$ Dirichlet homogène pour la valeur de la fonction sur Γ_x S_i Section de l'inducteur i

Notations liées au domaine discret

Γ_h	Frontière de \mathcal{D}_h $(\partial \mathcal{D}_h)$
$\mathbf{w_{i}^{1}}$	Fonction vectorielle d'interpolation associée à l'arête 'i'
$\mathbf{w_{i}^{2}}$	Fonction vectorielle d'interpolation associée à la facette 'i'
\mathcal{D}_h	Domaine d'étude discrétisé (ensemble des éléments volumiques)
\mathcal{E}_h	Ensemble des arêtes
\mathcal{F}_h	Ensemble des faces
\mathcal{N}_h	Ensemble des nœuds
\mathcal{W}^0	Espace de dimension n_0 des vecteurs contenant toutes les valeurs aux nœuds
\mathcal{W}^1	Espace de dimension n_1 des vecteurs contenant toutes les valeurs de circulation sur les arêtes
\mathcal{W}^2	Espace de dimension n_2 des vecteurs contenant toutes les valeurs des flux à travers les facettes
\mathcal{W}^3	Espace de dimension n_3 des vecteurs contenant toutes les valeurs associées aux éléments
$\underline{\mathbf{D}}$	Matrice $n_3 \mathbf{x} n_2$ d'incidence éléments-facettes
$\underline{\mathbf{G}}$	Matrice $n_1 \times n_0$ d'incidence arêtes-nœuds
$\underline{\mathbf{M}}$	Matrice de masse
$\underline{\mathbf{R}}$	Matrice $n_2 \times n_1$ d'incidence facettes-arêtes
n_0	Nombre de nœuds du maillage M
n_1	Nombre d'arêtes du maillage M
n_2	Nombre de facettes du maillage M
n_3	Nombre d'éléments du maillage M
W^0	Espace des fonctions scalaires de dimension n_0 engendré par les fonctions d'interpolation aux nœuds
w_i^0	Fonction scalaire d'interpolation associée au nœud 'i'

Liste des symboles xvii

W^1	Espace des fonctions vectorielles de dimension n_1 engendré par les fonctions d'interpolation aux arêtes
W^2	Espace des fonctions vectorielles de dimension n_2 engendré par les fonctions d'interpolation aux facettes
W^3	Espace des fonctions scalaires de dimension n_3 engendré par les fonctions d'interpolation aux éléments

Champs électromagnétiques

$\mathbf{B}\left(\mathbf{x},t\right)$	Induction magnétique (T)
$\mathbf{D}\left(\mathbf{x},t\right)$	Induction électrique (C/m^2)
$\mathbf{E}\left(\mathbf{x},t\right)$	Champ électrique (V/m)
$\mathbf{H}\left(\mathbf{x},t\right)$	Champ magnétique (A/m)
$\mathbf{J}\left(\mathbf{x},t\right)$	Densité de courant (A/m^2)
$\mathbf{J}_{ind}\left(\mathbf{x},t\right)$	Densité de courant induit (A/m^2)
$\rho\left(\mathbf{x},t\right)$	Densité de charge électrique (C/m^3)
$ ho_i$	Charge dans l'élément 'i' (C)
$\underline{ ho}$	Vecteur (1xn3) contenant toutes les charges ρ_i
$\underline{\mathbf{b}}$	Vecteur (1xn2) contenant tous les flux b_i
$\underline{\mathbf{d}}$	Vecteur (1xn2) contenant tous les flux d_i
$\underline{\mathbf{e}}$	Vecteur (1xn1) contenant toutes les circulations e_i
$\underline{\mathbf{h}}$	Vecteur (1xn1) contenant toutes les circulations h_i
$\mathbf{\underline{j}}$	Vecteur (1xn2) contenant tous les flux j_i
b_i	Flux de vecteur induction magnétique à travers la facette 'i' (Wb)
d_i	Flux de l'induction électrique à travers la facette 'i' (C)
e_i	Circulation du champ électrique le long de l'arête 'i'(V)
h_i	Circulation du champ magnétique le long de l'arête 'i'(A)
j_i	Flux de la densité de courant à travers la facette 'i' (courant à travers la facette 'i' en A)

${\bf Champs\ sources}$

$lpha_i$	Valeur de la fonction α au nœud 'i'
α	Fonction scalaire source
$oldsymbol{H}_{s}\left(\mathbf{x},t ight)$	Champ source (A/m)
$oldsymbol{K}\left(\mathbf{x},t ight)$	Champ source normalisé (A)
$oldsymbol{N}\left(\mathbf{x},t ight)$	Champ source normalisé tel que ${\bf rot}{\pmb K}={\pmb N}~({\bf A}/m^2)$
$\mathbf{J}_{s}\left(\mathbf{x},t\right)$	Densité de courant source (A/m ²)

xviii Liste des symboles

\underline{lpha}	Vecteur (1xn0) des valeurs de α au nœud 'i'
\underline{h}	Vecteur (1xn1) contenant toutes les circulations h_{si}
$\underline{m{k}}$	Vecteur (1xn1) contenant toutes les circulations k_i
\underline{n}	Vecteur (1xn2) contenant toutes les circulations n_i
h_{si}	Circulation du champ source le long de l'arête 'i' (A)
k_i	Circulation du champ source normalisé le long de l'arête 'i'
n_i	Flux du champ source normalisé N de spires à travers la facette 'i' (A)

Potentiels

$\boldsymbol{A}\left(\mathbf{x},t\right)$	Potentiel vecteur magnétique (Wb/m)
$\boldsymbol{A}_{h}\left(\mathbf{x},t\right)$	Approximation Éléments Finis du potentiel vecteur magnétique (Wb/m)
$m{T}\left(\mathbf{x},t ight)$	Potentiel vecteur électrique (A/m)
$oldsymbol{T}_{h}\left(\mathbf{x},t ight)$	Approximation Éléments Finis du potentiel vecteur électrique (A/m)
$\Omega\left(\mathbf{x},t\right)$	Potentiel scalaire magnétique
$\Omega_h\left(\mathbf{x},t\right)$	Approximation Éléments Finis du potentiel scalaire magnétique
Ω_i	Valeur du potentiel scalaire magnétique au nœud 'i'
$\underline{\Omega}$	Vecteur (1xn0) contenant toutes les valeurs nodales Ω_i
\underline{arphi}	Vecteur (1xn0) contenant toutes les valeurs nodales φ_i
\underline{a}	Vecteur (1xn1) contenant toutes les circulations a_i
\underline{t}	Vecteur (1xn1) contenant toutes les circulations k_i
$\varphi\left(\mathbf{x},t\right)$	Potentiel scalaire électrique (V)
$\varphi_h\left(\mathbf{x},t\right)$	Approximation Éléments Finis du potentiel scalaire électrique (V)
$arphi_i$	Valeur du potentiel scalaire électrique au nœud 'i' (V)
a_i	Circulation du potentiel vecteur magnétique le long de l'arête 'i' (Wb)
t_i	Circulation du potentiel vecteur électrique le long de l'arête 'i' (A)

Grandeurs globales et couplage circuit

ϕ	Flux traversant une surface (Wb)
ξ	Différence de potentiel magnétique (A)
a_{cir}	Nombre d'arêtes du circuits
b_{cir}	Nombre de boucles indépendante du circuit
J_{cir}	Courant fictif dans une boucle du circuit extérieur
KM	Matrice d'incidence arête - maille
n_{cir}	Nombre de nœuds du circuits
U_C	Vecteur des tensions des dipôles capacitifs

Liste des symboles xix

U_L	Vecteur des tensions des dipôles inductifs
U_R	Vecteur des tensions des dipôles résistifs
U_S	Vecteur des tensions sources
I	Courant électrique (A)
V	Différence de potentiel électrique (V)

Lois de comportement

$\boldsymbol{B_r}\left(\mathbf{x},t\right)$	Induction rémanente (T)
$oldsymbol{H_{c}}\left(\mathbf{x},t\right)$	Champ coercitif (A/m)
μ	Perméabilité $(H.m^{-1})$
μ_0	Perméabilité du vide $(4\pi10^{-7}H.m^{-1})$
μ_a	Perméabilité magnétique d'un aimant $(H.m^{-1})$
μ_r	Perméabilité relative d'un milieu
σ	Conductivité électrique $(\Omega^{-1}.m^{-1})$
$\mathbf{\underline{b_r}}$	Vecteur (1xn2) contenant tous les flux b_{ri}
$\underline{\mathbf{h}}$	Vecteur (1xn1) contenant toutes les circulations h_{ci}
ε	Permittivité
$arepsilon_0$	Permittivité du vide
$arepsilon_r$	Permittivité relative d'un milieu
b_{ri}	Flux de l'induction rémanente à travers la facette 'i' (Wb)
h_{ci}	Circulation du champ coercitif le long de l'arête 'i' (\mathbf{A})

Autres grandeurs physiques

λ	Longueur d'onde (m)
\mathbf{x}	position
ω	Pulsation $(rad.s^{-1})$
f	fréquence (Hz)
r_i	Résistance de l'inducteur bobiné 'i'
t	temps (s)

Éléments finis

$oldsymbol{w}_i^1$	ième fonction de base conforme $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{rot},\mathcal{D})$
$oldsymbol{w}_i^2$	ième fonction de base conforme $H(\operatorname{div},\mathcal{D})$
Jac	matrice Jacobienne

xx Liste des symboles

 $u,\,v,\,w$ Coordonnées d'un point dans le repère de l'élément de référence

 w_i^0 i^{ème} fonction de base P^1 conforme $H^1(\mathcal{D})$

 $x,\,y,\,z$ Coordonnées d'un point de l'espace dans le repère cartésien (O,i,j,k)

A nombre total d'arêtes
a numéro global d'arête
E nombre total d'éléments
e numéro global d'élément
F nombre total de facettes
f numéro global de facette

K Un élément géométrique du maillage

 $\begin{array}{ccc} N & & \text{nombre total de nœuds} \\ n & & \text{numéro global de nœud} \end{array}$

Divers

Alpha Rapport du pas de déplacement

Première partie

Modélisation spécifique des problèmes d'électromagnétisme

Chapitre 1

Mise en équations

Résumé

Ce chapitre définit les modèles étudiés en précisant les équations mathématiques régissant ces modèles (magnétodynamique, magnétostatique et électrocinétique). Sont également détaillés les sous-domaines concernés par le modèle, les conditions de passage d'un sous-domaine à un autre et les conditions sur les limites du domaine.

1.1 Définition du problème

Dans la suite, on considère un système électrotechnique (cf. figure 1.1) composé d'air, de matériaux ferromagnétiques et/ou conducteurs et de sources de champ magnétique (inducteurs bobinés ou non, et/ou aimants permanents).

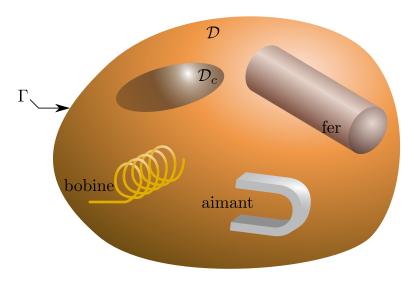


Figure 1.1 – Décomposition schématique du domaine d'étude \mathcal{D}

L'ensemble du système forme le domaine d'étude \mathcal{D}^1 de frontière Γ . Il est composé :

- avec les milieux conducteurs, du domaine \mathcal{D}_c de frontière Γ_c . C'est le domaine où se créent les courants de Foucault;
- d'un milieu non-conducteur \mathcal{D}_{nc} .

^{1.} \mathcal{D} est un ouvert de \mathbb{R}^3

Le domaine \mathcal{D}_{nc} est constitué, par exemple, par :

- des sources : inducteurs bobinés ou massifs portant une distribution de courant \mathbf{J}_s , aimants permanents (s'ils sont supposés non conducteurs);
- des matériaux ferromagnétiques;
- de l'air (de perméabilité magnétique μ_0).

Les sources (régions du domaine où une densité de courant source \mathbf{J}_s est imposée) définissent un sous-domaine \mathcal{D}_s^2 .

Remarque 1.1.1 Si la conductivité dans les matériaux ferromagnétiques, dans les aimants ou dans les bobines n'est pas négligée, les milieux correspondants sont à inclure dans le domaine \mathcal{D}_c .

Remarque 1.1.2 Conducteurs, aimants, matériaux ferromagnétiques peuvent être en contact les uns avec les autres.

Remarque 1.1.3 Si le système étudié présente des symétries ou des périodicités géométriques, il est possible de réduire le domaine d'étude \mathcal{D} à une partie seulement du système.

Remarque 1.1.4 La frontière Γ peut coïncider avec la frontière d'un milieu autre que l'air.

La frontière Γ est subdivisée en deux portions Γ_B et Γ_H pour imposer des conditions aux limites du domaine (cf. paragraphe 1.7)³. Pour rappel, Γ_B est la frontière du domaine \mathcal{D} où sont imposées des conditions de la forme $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$; Γ_H est la frontière du domaine \mathcal{D} où sont imposées des conditions de la forme $\mathbf{n} \wedge \mathbf{H} = 0$, \mathbf{n} est le vecteur normal sortant de la frontière considérée.

Les phénomènes électromagnétiques sont recherchés sur un intervalle de temps $\mathcal T$ compris entre 0 et T secondes :

$$\mathcal{T} = [0, T] \tag{1.1}$$

1.2 Équations de Maxwell

Le champ électromagnétique est défini par quatre champs de vecteur :

```
— \mathbf{D}\left(\mathbf{x},t\right) : induction électrique (C/m<sup>2</sup>) ;
```

— $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$: champ électrique (V/m) ;

— $\mathbf{H}(\mathbf{x},t)$: champ magnétique (A/m);

— $\mathbf{B}(\mathbf{x},t)$: induction magnétique (T);

Ces champs de vecteurs dépendent de :

- t : temps (s);

x : position considérée.

Les répartitions spatiale et temporelle des champs magnétiques et électriques sont obtenues par les équations de Maxwell [Bossavit 1993], [Durand 1968], [Fournet 1985], [Pérez et al 1990]. Elles s'écrivent alors :

^{2.} Les sous-domaines \mathcal{D}_c , \mathcal{D}_{nc} et \mathcal{D}_s sont inclus dans \mathcal{D} .

^{3.} On aura : $\Gamma_B \cup \Gamma_H = \Gamma$ et $\Gamma_B \cap \Gamma_H = \emptyset$

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} (\mathbf{x}, t) = \mathbf{J} (\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{D} (\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad \text{(Loi de Maxwell-Ampère)}$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} (\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B} (\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad \text{(Loi de Maxwell-Faraday)}$$

$$(1.2)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \qquad \text{(Loi de Maxwell-Faraday)}$$
 (1.3)

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0$$
 (Loi de Gauss magnétique) (1.4)

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t)$$
 (Loi de Gauss électrique) (1.5)

avec, en complément des quatre champs de vecteurs définis précédemment :

- $-- \rho(\mathbf{x},t)$: densité de charge électrique (C/m³);
- $\mathbf{J}(\mathbf{x},t)$: densité de courant (A/m^2) ;

Remarque 1.2.1 Dans ce système d'équations, les relations 1.2 et 1.3 expriment le couplage entre les grandeurs électriques et magnétiques.

On ajoute enfin l'équation de conservation de la charge électrique :

$$\operatorname{div} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0$$
 (1.6)

Cette dernière équation est implicitement contenue dans les équations 1.2, 1.3, 1.4 et 1.5.

La densité de courant ${f J}$ peut se décomposer en deux termes : ${f J_s}$ dans le cas où l'inducteur est bobiné, la densité de courant est supposé uniforme et connue, et $\mathbf{J_{ind}}$ dans le cas d'un domaine conducteur où la densité de courant est inconnue.

$$\mathbf{J}(\mathbf{x},t) = \mathbf{J_{ind}}(\mathbf{x},t) + \mathbf{J_s}(\mathbf{x},t)$$
(1.7)

Ce système est complété par les lois de comportement, dépendant des matériaux modélisés.

$$\mathbf{J_{ind}} = \mathcal{S}(\mathbf{E}(\mathbf{x},t)) \mathbf{H}(\mathbf{x},t) = \mathcal{K}(\mathbf{B}(\mathbf{x},t))$$
 (1.8)

Elles seront détaillées au paragraphe 1.5.

La vérification du système d'équations 1.2, 1.3, 1.4 et 1.5 4 implique les conditions de continuité suivantes au passage d'une interface entre deux milieux, caractérisée par sa normale n :

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \tag{1.9}$$

$$\mathbf{H} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \tag{1.10}$$

$$\mathbf{B.n} = \mathbf{0} \tag{1.11}$$

$$\mathbf{D.n} = \mathbf{0} \tag{1.12}$$

Ces conditions de passage seront analysées au paragraphe 1.6.

Pour être bien posé, le problème défini par les équations 1.2, 1.3, 1.4 et 1.5 doit être accompagné de conditions sur les limites du domaine. On écrit classiquement :

^{4.} au sens des distributions

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{H})|_{\Gamma_{\cdot\cdot\cdot}} = \mathbf{H}^{\Gamma} \Leftrightarrow (\mathbf{J} \cdot \mathbf{n})|_{\Gamma_{\cdot\cdot\cdot}} = \mathbf{J}^{\Gamma}$$
 (1.13)

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{H})|_{\Gamma_H} = \mathbf{H}^{\Gamma} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{J} \cdot \mathbf{n})|_{\Gamma_H} = \mathbf{J}^{\Gamma}$$

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{E})|_{\Gamma_E} = \mathbf{E}^{\Gamma} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})|_{\Gamma_E} = \mathbf{B}^{\Gamma}$$

$$(1.13)$$

Ces conditions à la limite seront analysées au paragraphe 1.7.

Remarque 1.2.2 Dans code Carmel temporel, les valeurs de ces conditions à la limite sont nulles.

Hypothèse de l'ARQS 1.3

La résolution des équations de Maxwell, telles qu'elles sont présentées dans le paragraphe précédent, conduit à des solutions dites "solutions en potentiels retardés" [Pérez et al 1990]. Ceci signifie qu'il existe un retard entre le champ électromagnétique en un point de l'espace et les sources qui lui ont donné naissance (cf. annexe B).

L'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) consiste à supposer que la durée caractéristiques d'évolution des sources (par exemple : leur période) est très nettement supérieure à la durée de propagation. Ceci peut être mis en évidence par une analyse dimensionnelle des équations de Maxwell [Cahouet 1992].

Pour comprendre cette approche, avant tout, il convient de définir la notion de temps caractéristique d'un système [Montier 2018]. Celui-ci caractérise la rapidité de l'évolution d'une grandeur physique dans le temps. En d'autres termes, il représente l'ordre de grandeur du temps requis pour qu'un système soumis à une perturbation atteigne un équilibre. Dans cet exposé, on s'intéresse aux problèmes dits basse fréquence, et plus particulièrement aux régimes quasi-stationnaires, valables lorsque le temps caractéristique du système étudié τ est très grand devant le temps de propagation de la lumière dans le milieu $\tau_{em} = l/c$, où l représente la longueur caractéristique du système et $c = (\varepsilon \mu)^{-\frac{1}{2}}$ la célérité de la lumière dans le milieu (ε étant sa permittivité électrique et μ sa perméabilité magnétique). En définissant la vitesse d'évolution du système par v=l/ au, la proposition précédente signifie également que l'on a $v \ll c$.

Dans ce cas, on peut considérer qu'une perturbation est transmise instantanément dans tout le domaine, ce qui permet de négliger ainsi les phénomènes de propagation. On parle alors de limite non-relativiste du modèle. En pratique, cette approximation est valide pour les dispositifs électrotechniques qui ont des fréquences de réponse allant jusqu'à quelques centaines de kHz.

Une analyse dimensionnelle simple permet cependant de montrer que sous ces hypothèses, les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday ne sont pas compatibles. En effet, en notant | * | l'ordre de grandeur de la quantité *, l'équation de Maxwell-Faraday donne :

$$\frac{|\mathbf{E}|}{l} \simeq \frac{|\mathbf{B}|}{\tau} \Rightarrow |\mathbf{E}| \simeq v|\mathbf{B}| \tag{1.15}$$

avec $v = l/\tau$.

De même, l'équation de Maxwell-Ampère sans courant source permet d'obtenir par l'analyse dimensionnelle:

$$\frac{|\mathbf{H}|}{l} \simeq \frac{|\mathbf{D}|}{\tau} \tag{1.16}$$

En ajoutant les lois de comportement linéaires, on a alors :

$$\frac{|\mathbf{B}|}{\mu l} \simeq \frac{\varepsilon |\mathbf{E}|}{\tau} \Rightarrow |\mathbf{E}| \simeq \frac{c^2}{v} |\mathbf{B}|$$
 (1.17)

Ainsi les deux équations Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday mènent à deux facteurs d'échelles entre $|\mathbf{E}|$ et $|\mathbf{B}|$, à savoir v ou $\frac{c^2}{v}$. Ces dernières deviennent compatibles dans le cas relativiste où $v \simeq c$. Ainsi les deux équations Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday produisent des facteurs d'échelles incompatibles et il faudra donc négliger en partie l'une des deux. Ce choix se fera en particulier au regard de l'ordre de grandeur des sources de courant \mathbf{J} et de charge ρ . Les deux modèles en découlant sont ceux de l'électro-quasistatique et de la magnéto-quasistatique.

1.3.1 Modèle électro-quasistatique

Dans le modèle **électro-quasistatique**, la variation du champ d'induction électrique produit un champ magnétique alors qu'une fluctuation du champ d'induction magnétique n'induit aucun champ électrique. L'équation de Maxwell-Faraday n'est donc plus valide et est remplacée par :

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E} = \mathbf{0}$$

Par une analyse dimensionnelle, on peut montrer que ce modèle est valable lorsque:

$$|\mathbf{J}| << |\rho| c \tag{1.18}$$

Ainsi, les équations de Maxwell dans la limite de l'approximation quasi-stationnaire électrique sont :

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{H}_e = \mathbf{J}_e + \frac{\partial \mathbf{D}_e}{\partial t} \tag{1.19}$$

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E}_e = 0\tag{1.20}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_e = 0 \tag{1.21}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}_e = \rho_e \tag{1.22}$$

tandis que celle de la conservation de la charge reste identique :

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J}_e = 0 \tag{1.23}$$

Dans ce jeu d'équations, le champ d'induction magnétique \mathbf{B}_e et le champ magnétique \mathbf{H}_e n'apparaissent plus en tant que terme source (membre de droite). Les équations électriques et magnétiques sont alors découplées. Ainsi, il est possible de ne résoudre que les équations 1.20, 1.22 et 1.23 pour trouver \mathbf{E}_e et \mathbf{D}_e :

$$\mathbf{rot} \, \mathbf{E}_e = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}_e = \rho_e$$

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J}_e = 0$$

et de reconstruire a posteriori les inconnues magnétiques \mathbf{B}_e et \mathbf{H}_e grâce à :

$$\begin{aligned} \mathbf{rot}\,\mathbf{H}_e &=& \mathbf{J}_e + \frac{\partial \mathbf{D}_e}{\partial t} \\ \mathrm{div}\,\mathbf{B}_e &=& 0 \end{aligned}$$

1.3.2 Modèle magnéto-quasistatique

Le modèle magnéto-quasistatique est au contraire valable lorsque :

$$|\mathbf{J}| >> |\rho| c \tag{1.24}$$

Ceci permet de négliger les courants de déplacement $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ dans l'équation de Maxwell-Ampère. Physiquement, cette approximation implique qu'une variation du champ d'induction magnétique produit un champ électrique tandis qu'une fluctuation du champ d'induction électrique n'a aucun effet sur le champ magnétique. Dans la limite de l'approximation quasi-stationnaire magnétique, les équations de Maxwell deviennent :

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{H}_m = \mathbf{J}_m \tag{1.25}$$

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E}_m = -\frac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial t} \tag{1.26}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_m = 0 \tag{1.27}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}_m = \rho_m \tag{1.28}$$

Du fait de l'hypothèse $|\mathbf{J}| >> |\rho| c$, l'équation de conservation de la charge est modifiée et n'admet que des courants stationnaires :

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_m = 0 \tag{1.29}$$

A première vue, les inconnues électriques n'apparaissent plus en tant que terme source des équations de Maxwell. On pourrait ainsi tenir un raisonnement analogue à celui du modèle électroquasistatique quant au découplage des équations électriques et magnétiques (trouver \mathbf{B}_m et \mathbf{H}_m grâce à 1.25, 1.27 et 1.29, puis reconstruire \mathbf{E}_m et \mathbf{D}_m grâce à 1.26 et 1.28.

Un problème survient cependant lorsque le système contient un domaine conducteur dans lequel sont générés des courants induits. En effet, le terme source dans l'équation de Maxwell-Ampère dépend de \mathbf{E} d'après la loi de comportement. Les quatre équations sont donc couplées dans \mathcal{D}_c et il s'agit alors de les résoudre simultanément. Pour résumer, les équations électriques et magnétiques du modèle magnéto-quasistatique peuvent être découplées dans $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_c$ et doivent être considérées simultanément dans \mathcal{D}_c .

Dans le domaine non conducteur $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_c$, on résout les équations 1.25, 1.27 et 1.29 dans un premier temps afin de trouver \mathbf{B}_m et \mathbf{H}_m :

$$\mathbf{rot} \, \mathbf{H}_m = \mathbf{J}_m \\
\operatorname{div} \mathbf{B}_m = 0 \\
\operatorname{div} \mathbf{J}_m = 0$$

pour ensuite reconstruire les champs \mathbf{E}_m et \mathbf{D}_m grâce à 1.26 et 1.28 :

$$\mathbf{rot} \, \mathbf{E}_m = -\frac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial t}$$
$$\operatorname{div} \mathbf{D}_m = \rho_m$$

Dans le domaine conducteur \mathcal{D}_c , on cherche \mathbf{B}_m , \mathbf{H}_m , \mathbf{E}_m et \mathbf{D}_m en résolvant simultanément :

$$\mathbf{rot} \mathbf{H}_{m} = \mathbf{J}_{m}$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{E}_{m} = -\frac{\partial \mathbf{B}_{m}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_{m} = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}_{m} = \rho_{m}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_{m} = 0$$

Remarque 1.3.1 Avec les lois de comportement pour la permittivité et la conductivité homogènes linéaires et isotropes dans le domaine conducteur, le modèle magnéto-quasistatique impose que ρ_m soit nul dans \mathcal{D}_c . En effet, 1.25 implique que div $\mathbf{J}_m = \sigma_m \operatorname{div} \mathbf{E}_m = 0$ dans le domaine conducteur (car div ($\operatorname{rot} \mathbf{H}_m$) = 0). Or $\rho_m = \operatorname{div} \mathbf{E}_m / \varepsilon_m$, d'où $\rho_m = 0$ dans \mathcal{D}_c . Dans ce cas, les équations de Maxwell-Gauss et de conservation de la charge deviennent équivalentes à div $\mathbf{E}_m = 0$ et l'on ne tiendra plus compte que de l'une des deux.

1.3.3 Choix du modèle

En pratique, les dispositifs utilisés dans l'électrotechnique ont des effets plutôt inductifs avec des courants de déplacement $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ souvent négligeables. Ainsi, le modèle **magnéto-quasistatique** est particulièrement adapté aux applications typiques de l'électrotechnique, et sera donc utilisé dans la suite de cet exposé.

Remarque 1.3.2 On pourra se référer à [Rapetti, Rousseau 2011] pour une justification plus mathématique, où des temps caractéristiques des différents phénomènes électromagnétiques sont comparés.

D'un point de vue terminologique, on peut distinguer deux classes de problèmes au sein du modèle **magnéto-quasistatique** :

- le problème **magnétostatique**, lorsque le système ne contient pas de sous-domaines conducteurs $(\mathcal{D}_c = \emptyset)$. Dans ce cas, le comportement du système est *statique* d'un point de vue magnétique: les équations principales du problème 1.25, 1.27 et 1.29 ne contiennent plus de termes en dérivées temporelles. Le lecteur remarquera que le problème n'est pas pour autant purement statique, de par le terme $\frac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial t}$ dans l'équation de Maxwell-Faraday 1.26. Cependant, la dynamique restreinte aux équations électriques, lesquelles sont résolues *a posteriori* une fois \mathbf{B}_m et \mathbf{H}_m trouvés.
- le problème **magnétodynamique**, si un sous-domaine conducteur est au contraire présent dans le domaine d'étude $(\mathcal{D}_c \neq \emptyset)$. Comme vu précédemment, il faudra tenir compte de toutes les équations dans le domaine conducteur, en particulier celle de Maxwell-Faraday, qui introduit le terme dynamique $\frac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial t}$

Afin de ne pas alour dir l'écriture, l'indice m sera abandonné dans la suite de cet exposé et les quantités ${\bf B},\,{\bf H},\,{\bf E},\,{\bf D},\,{\bf J}$ et ρ référer ont cependant bien à celles issues du modèle magnétoquasistatique.

1.4 Équations aux dérivées partielles dans le domaine continu

Dans les types de problèmes traités par code_Carmel, les répartitions spatiale et temporelle des champs électriques \mathbf{E} et \mathbf{J} et des champs magnétiques \mathbf{B} et \mathbf{H} sont recherchées dans tout le domaine \mathcal{D} et dans un intervalle de temps [0,T] (noté \mathcal{T}).

Les possibilités actuelles de la version temporelle de code_Carmel se limitent aujourd'hui au cas de la magnétodynamique et de l'électromagnétisme statique (magnétostatique et électrocinétique).

Remarque 1.4.1 La version spectrale de code_Carmel ne traite pas l'électrocinétique. Elle autorise la modélisation en magnétodynamique et en magnétostatique.

1.4.1 Problème magnétodynamique

Compte tenu des hypothèses de l'ARQS, les équations d'un problème électromagnétique en régime quasi-stationnaire sont :

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{H}\,(\mathbf{x},t) = \mathbf{J}\,(\mathbf{x},t) \tag{1.25}$$

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E}\left(\mathbf{x},t\right) = -\frac{\partial\mathbf{B}\left(\mathbf{x},t\right)}{\partial t}\tag{1.3}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \tag{1.4}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t) \tag{1.5}$$

avec:

$$\operatorname{div} \mathbf{J}\left(\mathbf{x},t\right) = 0 \tag{1.29}$$

1.4.2 Problème magnétostatique

On suppose que les phénomènes sont invariants en temps. Les équations faisant intervenir des termes magnétiques ou électriques sont découplées. Les équations de Maxwell s'écrivent alors pour les phénomènes magnétiques :

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0 \tag{1.30}$$

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{H}\,(\mathbf{x}) = \mathbf{J}_s\,(\mathbf{x})\tag{1.31}$$

On déduit de ces équations :

$$\operatorname{div} \mathbf{J}(\mathbf{x}) = 0 \tag{1.32}$$

Remarque 1.4.2 Dans le cas particulier où un mouvement est représenté, les phénomènes ne sont plus invariants en temps. L'hypothèse devient alors "absence des courants de Foucault". Dans ce cas les équations s'écrivent plus exactement :

$$div \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \tag{1.33}$$

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{H}(\mathbf{x},t) = \mathbf{J}_s\left(\mathbf{x},t\right) \tag{1.34}$$

et on a toujours :

$$div \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = 0 \tag{1.35}$$

1.4.3 Problème électrocinétique

Si le domaine d'étude est restreint au domaine conducteur \mathcal{D}_c , alors les équations à résoudre se limitent à :

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E}\left(\mathbf{x}\right) = 0\tag{1.36}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{J}\left(\mathbf{x}\right) = 0 \tag{1.32}$$

Remarque 1.4.3 La version spectrale de code_Carmel ne permet pas de traiter les problèmes de type électrocinétique.

1.5 Lois de comportement électrique et magnétique des milieux

Le comportement électrique et magnétique des différents milieux du domaine est pris en compte par les lois de comportement. Celles-ci lient les différents champs magnétiques et électriques entre eux. Ces relations mettent en jeu non seulement les champs eux-mêmes mais aussi des variables, comme la température ou bien encore les contraintes mécaniques. On supposera dans la suite ces variables constantes. Ainsi, les lois ne dépendent alors, en toute rigueur, que de la position considérée, du temps, éventuellement des champs électromagnétiques.

En général, dans un problème d'électrotechnique, une propriété physique caractérise un sous-domaine du domaine spatial \mathcal{D} .

1.5.1 Conductivité électrique

La conductivité électrique est généralement supposée constante par sous-domaine du domaine spatial \mathcal{D} . On obtient alors une relation de la forme suivante, pour chaque sous-domaine considéré :

$$\mathbf{J}(\mathbf{x},t) = \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{E}) \mathbf{E}(\mathbf{x},t) \tag{1.37}$$

avec σ la conductivité électrique dans le sous-domaine (Ω^{-1} .m⁻¹).

Remarque 1.5.1 Ce paramètre peut-être un tenseur de $\mathbb{R}^{3\times3}$.

Il peut être nécessaire de définir une conductivité anisotrope, par exemple, pour modéliser un paquet de tôles fines sous la forme d'un seul milieu ou pour limiter des courants parasites. Ceci est possible depuis la version 1.13.2 du code temporel, sous une forme vectorielle qui permet de définir la conductivité selon les 3 axes cartésiens Ox, Oy et Oz; ainsi que sous une forme tensorielle.

La forme vectorielle peut être utilisée, par exemple, pour un paquet de tôles en FeSi dans le plan Oxy et empilées dans la direction Oz. Si l'on définit que la conductivité est 100 fois plus faible selon Oz à cause des isolants, la conductivité de ce milieu sera définie ainsi : 5.0d7, 5.0d7, 5.0d5. Afin de permettre tous les cas possibles, il est possible de définir la conductivité par un tenseur 3x3, sa diagonale étant équivalente à la conductivité vectorielle.

Remarque 1.5.2 Attention! Il n'est possible d'utiliser des valeurs nulles dans la conductivité anisotrope qu'en formulation $\mathbf{A} - \varphi$. Des résultats aberrants peuvent être obtenus en formulation $\mathbf{T} - \Omega$, car cette dernière utilise l'inverse de la conductivité, la résistivité, qui deviendrait en partie infinie. Le code ne sait pas travailler avec de telles valeurs.

Remarque 1.5.3 Notons aussi qu'une trop grande anisotropie peut rendre les résultats plus difficiles à obtenir, en raison d'un mauvais conditionnement numérique du système à résoudre.

Dans le domaine conducteur \mathcal{D}_c , tous les champs peuvent être définis. En revanche, dans les zones non conductrices ($\sigma = 0$) où les courants induits sont nuls (seuls les courants d'inducteur

bobiné J_s existent), le champ électrique E ne peut alors être défini 5 . Dans ces zones, il faut alors résoudre un problème magnétostatique dont les équations aux dérivées partielles sont de la forme :

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{H}\,(\mathbf{x},t) = \mathbf{J_s}\tag{1.38}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \tag{1.4}$$

1.5.2 Perméabilité magnétique

Pour le comportement magnétique, si le matériau n'est pas ferromagnétique, le modèle est linéaire et de la forme suivante, pour chaque sous-domaine du domaine d'étude spatial \mathcal{D} :

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \mu_0 \,\mu_r(\mathbf{x}, \mathbf{H}) \,\mathbf{H}(\mathbf{x},t) + \mathbf{B}_r \tag{1.39}$$

avec:

- μ_0 la perméabilité magnétique de l'air;
- μ_r la perméabilité magnétique relative (ce paramètre peut-être un tenseur de $\mathbb{R}^{3\times3}$);
- \mathbf{B}_r l'induction magnétique rémanente.

1.5.2.1 Matériaux ferromagnétiques

Pour les matériaux ferromagnétiques, on peut utiliser des modèles relativement complexes qui prennent en compte le phénomène d'hystérésis [Johnson 1987]. Mais leur introduction dans des modèles numériques conduit à une augmentation du temps de calcul qui peut être acceptable en 2D, mais plus du tout en 3D aujourd'hui. Aussi on préférera utiliser, dans le cas de matériaux ferromagnétiques doux, une relation de la forme :

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \mu_0 \,\mu_r \left(\|\mathbf{H}\|_2^2 \right) \,\mathbf{H}(\mathbf{x},t) \tag{1.40}$$

avec une fonction μ_r qui peut être tirée :

— d'une loi comme [Marrocco 1977] (version temporelle de code_Carmel) :

$$H = \frac{B}{\mu_0} \frac{c B^{2\alpha} + \tau \epsilon}{B^{2\alpha} + \tau} \tag{1.41}$$

où:

- μ_0 est la perméabilité magnétique du vide;
- α , c, τ et ϵ sont des variables caractéristiques du matériau magnétique considéré.
- d'une expression par splines de la loi de comportement B(H) (versions spectrale et temporelle de code_Carmel);
- d'une loi de Fröhlich. Ce modèle anhystérétique [Swift et al, 2001], a été développé par Fröhlich en 1881. La relation entre l'induction et le champ magnétique peuvent être présentée sous deux manières :

$$\mu(\|H\|_2) = \frac{\alpha}{1 + \alpha\beta \|H\|_2}$$
 (1.42)

ou

^{5.} En conséquence, le champ électrique ${\bf E}$ ne peut alors être défini de manière unique puisqu'il existe alors une infinité de champs ${\bf E}$ vérifiant la loi de comportement 1.37 et l'équation aux dérivées partielles 1.3 (Si un vecteur ${\bf X}$ est solution de 1.3 alors tout champ ${\bf E}$ tel que ${\bf E}={\bf X}+{\bf grad}\,\varphi$ avec φ une fonction scalaire de valeur finie, est aussi solution de 1.3 et est de plus solution de 1.37 car comme $\sigma=0$, on a ${\bf J}_{\rm ind}={\bf 0}$ en tout point de ${\cal D}$)

$$\nu(\|B\|_2) = \frac{1}{\alpha - \beta \|B\|_2}$$
 (1.43)

avec $\alpha = \mu_m$ la perméabilité maximale et $\beta = \frac{\alpha}{\|B_{sat}\|_2}$ où $\|B_{sat}\|_2$ est la valeur de l'induction magnétique à la saturation.

Remarque 1.5.4 La version spectrale de code_Carmel ne dispose que de la forme avec des splines (interpolation linéaire par morceaux).

La loi de comportement magnétique pourra être réécrite sous la forme :

$$\mathbf{H} = \nu \left(\mathbf{B} \right) \mathbf{B} \tag{1.44}$$

pour simplifier les calculs variationnels. Alors, ν (exprimé en m.H^-1) désigne la réluctivité magnétique et est définie telle que :

$$\nu\left(\mathbf{B}\right) = \left(\mu\left(\mathbf{H}\right)\right)^{-1} \tag{1.45}$$

1.5.2.2 Aimants

Dans le cas des matériaux durs (aimants permanents), le phénomène de rémanence est introduit [Chavanne 1988], et on obtient une loi de la forme suivante pour chaque sous-domaine comportant un aimant permanent :

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \mu_a \mathbf{H}(\mathbf{x},t) + \mathbf{B}_r \tag{1.46}$$

avec:

- \mathbf{B}_r l'induction magnétique rémanente;
- μ_a la perméabilité magnétique de l'aimant qui est supposée constante et proche de la perméabilité de l'air.

1.6 Conditions de passage aux interfaces entre les milieux

Les relations précédentes sont valables en des points de l'espace où les propriétés $(\varepsilon, \mu, \sigma)$ des matériaux sont continues. Ce n'est plus le cas aux interfaces entre matériaux différents (figure 1.2).

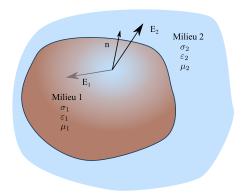


Figure 1.2 – Conditions de passage

Si l'on note \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 , \mathbf{D}_1 , \mathbf{D}_2 , \mathbf{B}_1 , \mathbf{B}_2 , \mathbf{H}_1 , \mathbf{H}_2 , les grandeurs calculées avec les équations 1.2 à 1.5 de part et d'autre de l'interface et \mathbf{n} , une normale à cette interface, les relations entre les grandeurs des deux domaines sont :

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \mathbf{0} \tag{1.47}$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \tag{1.48}$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J_{surf}} \tag{1.49}$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \gamma \tag{1.50}$$

où γ est une densité surfacique de charge sur l'interface et $\mathbf{J_{surf}}$ une densité de courant surfacique.

Dans le contexte de code Carmel, ces deux dernières grandeurs sont nulles :

$$\gamma = 0
\mathbf{J_{surf}} = \mathbf{0}$$
(1.51)

1.7 Conditions aux limites

La résolution du système composé des équations de Maxwell et des lois de comportement (cf. paragraphe 1.5) admet une infinité de solutions. Par conséquent, pour que le problème soit bien posé mathématiquement et pour assurer l'unicité de la solution, des conditions initiales sont ajoutées pour le domaine temporel [0,T] et des conditions aux limites pour le domaine spatial \mathcal{D} sont imposées.

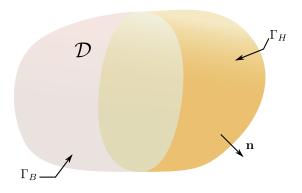


Figure 1.3 – Conditions aux limites

On suppose que \mathcal{D} contient le domaine source \mathcal{D}_s et le domaine conducteur \mathcal{D}_c qui est un ouvert borné de \mathbb{R}^3 , simplement connexe, à frontière Γ_c connexe et lipschitzienne. Enfin, on suppose que les domaines \mathcal{D}_c et \mathcal{D}_s sont strictement disjoints $(\mathcal{D}_c \cap \mathcal{D}_s = \emptyset)$ et strictement inclus dans \mathcal{D} $(\mathcal{D}_s \cap \Gamma = \mathcal{D}_{||} \cap \Gamma = \emptyset)$.

La frontière Γ du domaine \mathcal{D} est décomposée en deux parties complémentaires notées Γ_H et Γ_B telles que $\Gamma_H \cap \Gamma_B = \emptyset$ et $\Gamma_H \cup \Gamma_B = \Gamma$ (cf. figure 1.3). Sur la frontière Γ_H , on impose des conditions aux limites de la forme (conducteur magnétique parfait) :

$$\mathbf{H}(\mathbf{x},t) \times \mathbf{n}|_{\Gamma_H} = \mathbf{0} \tag{1.52}$$

Cette condition permet de considérer un milieu de perméabilité magnétique infinie de l'autre côté du domaine, forçant le champ magnétique à traverser la frontière Γ_H .

D'après la relation 1.25, on en déduit que (mur électrique) :

$$\mathbf{J}(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_H} = 0 \tag{1.53}$$

Sur la frontière Γ_B , en général, on impose des conditions aux limites qui dépendent de la nature du milieu en contact avec Γ_B . Si le milieu est conducteur, on impose (conducteur électrique parfait) :

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{x},t\right) \times \mathbf{n}|_{\Gamma_B} = \mathbf{0} \tag{1.54}$$

d'après l'expression 1.3, on en déduit que (mur magnétique) :

$$\mathbf{B}\left(\mathbf{x},t\right)\cdot\mathbf{n}|_{\Gamma_{B}}=0\tag{1.55}$$

En revanche, si le milieu n'est pas conducteur, on impose seulement des conditions aux limites sur ${\bf B}$ et non pas sur ${\bf E}$, ${\bf E}$ n'étant pas défini dans les zones non conductrices [Golovanov et al 1998]. Dans ce cas, la seule condition que l'on peut imposer à ${\bf E}$ est que sa composante tangentielle s'écrive ${\bf E_t}={\bf n}\times{\bf grad}\,\varphi$ avec φ un potentiel scalaire électrique.

Enfin, il s'agira d'expliciter les conditions sur Γ_c . En effet, cette frontière est strictement incluse dans le domaine d'étude et ne devrait donc pas porter de conditions limites. Cependant, avec le modèle magnéto-quasistatique, l'inconnue électrique n'est prise en compte qu'à l'intérieur du domaine conducteur. Il convient d'ajouter une condition limite sur Γ_c . Celle-ci est obtenue sur Γ_c à partir de l'équation de continuité tangentielle du champ magnétique pour des courants surfaciques nuls :

$$[\mathbf{H} \times \mathbf{n}]_{\Gamma_c} = 0 \tag{1.56}$$

En considérant ensuite la divergence de cette dernière et l'égalité vectorielle :

$$\operatorname{div} (\mathbf{U} \times \mathbf{n}) = \operatorname{rot} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}$$

on a:

$$\left[\mathbf{rot}\,\mathbf{H}\,.\,\mathbf{n}\right]_{\Gamma_c} = 0\tag{1.57}$$

Finalement, l'équation de Maxwell-Ampère permet d'obtenir :

$$[(\mathbf{J}_s + \sigma \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n}]_{\Gamma} = 0 \tag{1.58}$$

Or, \mathbf{J}_s est nul sur Γ_c car il n'y a pas de conducteur bobiné dans \mathcal{D}_c ou en contact avec \mathcal{D}_c , et car $\sigma = 0$ dans $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_c$. On obtient alors la condition limite sur \mathbf{E} le long de Γ_c :

$$\sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} |_{\Gamma_c} = 0 \tag{1.59}$$

Remarque 1.7.1 La relation précédente s'écrit aussi $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_c} = 0$ ce qui permet d'assurer la conservation de \mathbf{J} entre $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_c$ où \mathbf{J} est nul, et \mathbf{D}_c où \mathbf{J} est défini et différent de 0.

Remarque 1.7.2 Le cas où le domaine conducteur \mathcal{D}_c et le domaine source \mathcal{D}_s touche la frontière Γ n'est ainsi pas pris en compte ici. Cependant, le modèle peut être facilement adapté pour traiter ces cas.

Remarque 1.7.3 Dans le cas de la version spectrale de code_Carmel, les conditions à la limites pourront ne pas être nulles. Ce point sera détaillé plus loin.

Chapitre 2

Formulations en potentiel des équations dans code_Carmel

Résumé

La résolution des équations de Maxwell et des lois de comportement associées peut être obtenue en considérant les champs comme inconnues [Bossavit 2003], [Daveau, Rioux-Damidau 1999], [Dular 1994], [Ren et al 1990]. Néanmoins, dans code_Carmel, on préfère exprimer les champs magnétiques et électriques en fonction de potentiels qui peuvent être scalaires ou vectoriels. Les équations de l'électrocinétique, de la magnétostatique et de la magnétodynamique sont décrites ici en fonction de potentiels en reprenant l'exposé de [Le Menach 1999] .

2.1 Problème électrocinétique

Dans le cas d'un problème électrocinétique (cf. figure 2.1), on cherche à obtenir la distribution de densité de courant dans un matériau conducteur soumis, par exemple, à une différence de potentiel électrique [Le Menach 1999], [Korecki 2009].

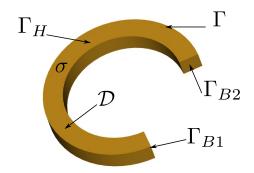


Figure 2.1 – Problème type en Électrocinetique

2.1.1 Rappel des équations

Si les sources sont de type continu (invariables en temps), on peut résoudre un problème d'électrocinétique pour obtenir le régime permanent des grandeurs électriques du domaine conducteur. Dans ce cas, le système d'équations à résoudre s'écrit :

$$\mathbf{rotE}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{ avec } \mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_B} = \mathbf{0}$$
 (2.1)

$$\operatorname{div} \mathbf{J_{ind}} (\mathbf{x}) = 0 \operatorname{avec} \mathbf{J_{ind}} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_H} = 0$$
 (2.2)

$$\mathbf{J_{ind}}(\mathbf{x}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{x}) \tag{2.3}$$

où σ est constant par sous-domaine.

Les répartitions de \mathbf{E} et \mathbf{J}_{ind} sont recherchées dans tout le domaine d'étude, leurs évolutions sont indépendantes du temps. Deux formulations en potentiel peuvent être utilisées pour résoudre ce type de problème.

2.1.2 Formulation magnétique φ

Comme le champ est à rotationnel nul (cf. équation 2.1) et, comme le domaine \mathcal{D} est simplement connexe et Γ connexe, il s'exprime en fonction d'un potentiel scalaire électrique φ_e tel que :

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\,\varphi_e \tag{2.4}$$

En exprimant la densité de courant J_{ind} en fonction du potentiel scalaire φ_e et de la loi de comportement électrique 1.37 (ou, pour la formulation φ , comme le potentiel vecteur magnétique n'est plus introduit dans l'équation 2.32), on résout l'équation :

$$\operatorname{div} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi_e(\mathbf{x}) = 0 \operatorname{avec} \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi_e \tag{2.5}$$

Dans le cas de la figure 2.1, la surface du conducteur se décompose en quatre parties Γ_B , Γ_H (avec $\Gamma = \Gamma_B \cup \Gamma_H$), Γ_{B1} et Γ_{B1} (avec $\Gamma_B = \Gamma_{B1} \cup \Gamma_{B2}$). Les conditions aux limites 1.54 s'écrivent alors :

$$\varphi_e|_{\Gamma_{B1}} = \varphi_1 \quad \text{et} \quad \varphi_e|_{\Gamma_{B2}} = \varphi_2$$
 (2.6)

On notera que $\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$ représente la différence de potentiel imposée au conducteur. Le potentiel scalaire étant défini à une constante près, on peut choisir arbitrairement $\varphi_2 = 0$ et $\varphi_1 = \varphi_{12}$. On introduit maintenant un potentiel scalaire source φ_s défini de la façon suivante (voir figure 2.2):

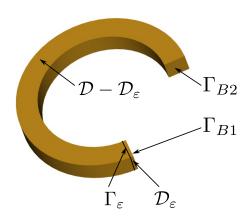


Figure 2.2 – Problème type en Électrocinetique et imposition d'un potentiel scalaire

$$\varphi_s|_{\Gamma_{B2}} = 0 \; ; \; \varphi_s|_{\Gamma_{B1}} = \varphi_{12} \; \text{et} \; \varphi_s = 0 \; \text{sur} \; \mathcal{D} - \mathcal{D}_{\varepsilon}$$
 (2.7)

et φ_s varie linéairement sur l'épaisseur ε qui peut être quelconque. Le potentiel φ_e peut donc s'écrire en introduisant un potentiel φ^1 :

$$\varphi_e = \varphi + \varphi_s \text{ avec } \varphi|_{\Gamma_B} = 0$$
 (2.8)

Le problème initial se réduit alors au problème équivalent suivant :

$$\operatorname{div} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi \left(\mathbf{x} \right) = -\operatorname{div} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi_{s} \left(\mathbf{x} \right) \tag{2.9}$$

avec:

- $-\mathbf{E} = -\operatorname{grad}(\varphi + \varphi_s);$
- $\operatorname{div} \mathbf{J}_{ind} = 0;$
- $\mathbf{J}_{ind} = -\sigma \operatorname{grad} (\varphi + \varphi_s)$

2.1.3 Formulation électrique T

Comme la densité de courant div \mathbf{J}_{ind} est, d'après l'équation 1.32, un champ de vecteur à divergence nulle, elle dérive d'un potentiel vecteur électrique \mathbf{T}_e tel que :

$$\mathbf{J}_{ind} = \mathbf{rot} \, \mathbf{T}_e \tag{2.10}$$

Par ailleurs, la densité de courant \mathbf{J}_{ind} est normale aux surfaces Γ_{B1} et Γ_{B2} . Par conséquent, le flux de \mathbf{J}_{ind} à travers ces surfaces qui représente l'intensité du courant I_0 peut servir de terme source pour le problème en potentiel vecteur électrique. En effet, si on note \mathbf{J}_0 une densité de courant répartie uniformément dans le conducteur de section S_c et \mathbf{n} la normale à S_c , on a :

$$I_0 = \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{n} \, S_c \tag{2.11}$$

La densité de courant \mathbf{J}_{ind} peut alors s'écrire comme la superposition de \mathbf{J}_0 plus une densité de courant \mathbf{J}_m , on a alors [Biro et al 1993] :

$$\mathbf{J}_{ind} = \mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_m \tag{2.12}$$

De par sa définition, J_0 est à divergence nulle on peut donc écrire :

$$\mathbf{J}_0 = \mathbf{rot}\,\mathbf{H}_s \tag{2.13}$$

où \mathbf{H}_s représente un champ magnétique source ². On notera que \mathbf{H}_s n'est pas unique et qu'il existe une infinité de champs sources tels que leur rotationnel donne la densité de courant \mathbf{J}_0 .

A partir des relations 2.10, 2.12 et 2.13 on déduit que J_m est à divergence nulle. J_m peut donc également, s'exprimer à partir d'un potentiel vecteur électrique T. On aura alors :

$$\mathbf{J}_{ind} = \mathbf{rot} \left(\mathbf{T} + \mathbf{H}_s \right) \tag{2.14}$$

Comme la composante normale de J_m est nulle sur Γ_H , on prendra alors pour ${\bf T}$:

$$\mathbf{T} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_H} = \mathbf{0} \tag{2.15}$$

En effet, contrairement à \mathbf{T}_e défini en 2.10, la circulation de \mathbf{T} sur une courbe C de Γ , entourant le conducteur, est égale à zéro puisque le flux de \mathbf{J}_m est nul à travers toute section ³.

En revanche, la circulation de \mathbf{H}_s sur ce contour C est égale à I_0 .

- 1. Comme indiqué au paragraphe 5.1.4, $\varphi \in H_{0,B}\left(\mathbf{grad},\mathcal{D}\right)$
- 2. appartenant à $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \mathcal{D})$, comme indiqué plus loin
- 3. D'après les relations 2.14 et 2.15, le potentiel vecteur \mathbf{T} appartient à $\mathbf{H}_{0,H}$ (\mathbf{rot},\mathcal{D}).

De la même façon que pour la formulation en potentiel scalaire électrique, le problème initial est équivalent à résoudre :

$$\mathbf{rot} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{T} (\mathbf{x}) = -\mathbf{rot} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{H}_s$$
 (2.16)

avec:

$$J_{ind} = rot (T + H_s)$$

Cependant, on notera que le potentiel vecteur T est défini à un gradient près. L'équation 2.16 admet donc une infinité de solutions. Pour assurer l'unicité de la solution, nous devons imposer une condition de jauge. Il en existe plusieurs, notamment la jauge de Coulomb [Durand 1968], [Fournet 1985]:

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = 0$$

Une autre jauge consiste à imposer le produit scalaire $\mathbf{U} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{f}(r)$ [Albanese, Rubinacci 2000]. (cf. annexe \mathbf{C}).

2.2 Problème magnétostatique

2.2.1 Rappel des équations

Lorsque le problème ne comporte pas de courants induits, on est amené à résoudre les équations de la magnétostatique, qui s'écrivent :

$$rot H(x) = J_s(x) \text{ avec } H \times n|_{\Gamma_H} = 0$$
(2.17)

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0 \operatorname{avec} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_B} = 0 \tag{2.18}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}_r \tag{2.19}$$

où μ est constant par sous-domaine.

Deux formulations en potentiel peuvent être utilisées.

Remarque 2.2.1 Le couplage entre les équations en potentiel définies dans le domaine conducteur et non conducteur se fait naturellement si on utilise des formulations de même nature comme la formulation \mathbf{A} - φ (resp. \mathbf{T} - Ω) pour le domaine conducteur et la formulation \mathbf{A} (resp. Ω) pour le domaine non conducteur. Il suffit de satisfaire certaines conditions de continuité sur les potentiels [Boualem 1997] [Dular 1994].

2.2.2 Formulation magnétique A

Comme l'induction magnétique est à divergence nulle, d'après la relation 1.4, un potentiel vecteur magnétique, noté \mathbf{A} , peut être introduit tel que :

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{rot}\mathbf{A}(\mathbf{x}) \tag{2.20}$$

La composante normale de ${\bf B}$ étant nulle sur Γ_B , on a alors pour le potentiel vecteur les conditions aux limites suivantes :

$$\mathbf{A} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_{\mathcal{P}}} = \mathbf{K}_{A} \tag{2.21}$$

avec **A** défini dans tout le domaine \mathcal{D}^4 .

Comme pour la formulation en potentiel scalaire, le terme source est, généralement, la densité de courant. Sans modifier l'aspect général du problème, on prendra \mathbf{K}_A égal à zéro sur Γ_B . Cependant, si l'on désire imposer un flux, on peut superposer au potentiel vecteur \mathbf{A} , un potentiel vecteur source \mathbf{A}_s sur tout ou une partie du domaine \mathcal{D} (cf. paragraphe 2.1.3).

Cette expression de l'induction magnétique (relation 2.20) conduit à une nouvelle relation pour le champ magnétique :

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{A} - \frac{1}{\mu} \mathbf{B} r$$

En utilisant 2.17, l'équation à résoudre est donnée par :

$$\mathbf{rot} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} (\mathbf{x}) = \mathbf{J_s} (\mathbf{x}) + \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{B_r}$$
 (2.22)

où μ est constant par sous-domaine.

On montre (à partir des relations du paragraphe 5.1.1), qu'il existe une infinité de solutions pour le potentiel vecteur **A**. L'unicité de la solution peut être obtenue, comme pour le potentiel vecteur électrique (cf. paragraphe 2.1.3), en imposant une condition de jauge [Albanese, Rubinacci 2000].

Remarque 2.2.2 Dans le cas de code_Carmel spectral, le problème n'est pas jaugé.

2.2.3 Formulation magnétique Ω

Pour prendre en compte les inducteurs, où la densité de courant Js est connue, on introduit, comme dans le cas de l'électrocinétique, un champ magnétique source Hs défini par l'équation 2.13.

$$Js = \mathbf{rot} \, \mathbf{H} s$$

Le domaine étant simplement connexe, on peut introduire un potentiel scalaire magnétique Ω tel que :

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) - \mathbf{grad}\,\Omega(\mathbf{x}) \tag{2.23}$$

Contrairement aux problèmes d'électrocinétique, on peut avoir \mathbf{H}_s tel que $\mathbf{H}_s \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ sur Γ_H . En effet, la frontière Γ_H n'est pas entièrement en contact avec les inducteurs. Avec les conditions aux limites sur \mathbf{H} , on a :

$$-\operatorname{\mathbf{grad}}\Omega \times \mathbf{n}|_{\Gamma_H} = \mathbf{0} \operatorname{d'où} \Omega|_{\Gamma_H} = K_{\Omega}$$
 (2.24)

où K_{Ω} est une constante. Il est possible d'introduire une différence de potentiel magnétique entre deux surfaces disjointes de Γ_H en ajoutant un potentiel scalaire source comme proposé dans le cas de l'électrocinétique. Dans les applications traitées par code_Carmel en magnétostatique, seuls des inducteurs seront considérés comme sources de champ magnétique. En conséquence, dans la suite, nous prendrons K_{Ω} nul 5 .

L'équation à résoudre se déduit de 1.4 et 2.23 telle que :

$$\operatorname{div} \mu \operatorname{\mathbf{grad}} \Omega (\mathbf{x}) = \operatorname{div} \mu \operatorname{\mathbf{H}} s (\mathbf{x}) - \operatorname{div} \mathbf{B_r}$$
 (2.25)

^{4.} D'après les relations 2.20 et 2.21, le potentiel vecteur **A** appartient $\mathbf{H}_{0,b}$ (rot, \mathcal{D}).

^{5.} Dans ces conditions, le potentiel scalaire Ω appartient donc au sous-espace $\mathbf{H}_{0,h}\left(\mathbf{grad},\mathcal{D}\right)$.

où μ est constant par sous-domaine.

2.3 Problème magnétodynamique

2.3.1 Rappel des équations

On considère un domaine \mathcal{D} contenant un domaine conducteur \mathcal{D}_c , supposé contractile, et des inducteurs bobinés.

Pour simplifier les développements mathématiques, nous limiterons les sources de champ électromagnétique à un seul inducteur mais une extension à plusieurs est tout à fait possible comme le montre les études réalisées avec code_Carmel. Enfin, il est aussi possible d'appliquer une différence de potentiel électrique aux bornes du domaine conducteur ou d'y imposer un courant.

Pour un inducteur bobiné, on définit un champ magnétique source, noté $\mathbf{H_s}$, tel que $\mathbf{rot}\mathbf{H_s} = \mathbf{J_s}$ avec $\mathbf{H_s} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ sur Γ_H .

Remarque 2.3.1 On note que H_s n'est pas unique et qu'il existe une infinité de champs sources tels que leur rotationnel soit égal à la densité de courant parcourant l'inducteur bobiné.

Sauf contraintes particulières sur le champ, celui-ci peut être défini sur tout le domaine \mathcal{D} . Dans ces conditions, la forme locale du théorème d'Ampère s'écrit :

$$\mathbf{rotH}(\mathbf{x},t) = \mathbf{J_{ind}}(\mathbf{x},t) + \mathbf{J_s}(\mathbf{x},t)$$
(2.26)

avec:

$$\mathbf{J_{ind}}(\mathbf{x}, t) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \tag{2.27}$$

où:

- $\mathbf{J_{ind}}$ représente la densité de courant induite dans le domaine conducteur \mathcal{D}_c ;
- σ désigne la conductivité électrique constante par sous-domaine du domaine conducteur \mathcal{D}_c .

De plus:

$$\mathbf{rotH_s}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{J_s}(\mathbf{x}, t) \tag{2.28}$$

Deux formulations en potentiel peuvent être introduites : la formulation électrique et la formulation magnétique. Ces formulations ne sont définies que dans le domaine conducteur \mathcal{D}_c (le terme $\mathbf{J_s}$ est donc nul, par contre, $\mathbf{H_s}$ ne l'est pas nécessairement).

2.3.2 Formulation électrique A $-\varphi$

Comme l'induction magnétique est à divergence nulle, d'après la relation 1.4, un potentiel vecteur magnétique, noté \mathbf{A} , peut être introduit tel que :

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \mathbf{rot}\mathbf{A}(\mathbf{x},t) \text{ avec } \mathbf{A} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_B} = \mathbf{0}$$
(2.29)

avec **A** défini dans tout le domaine \mathcal{D} .

En utilisant l'expression 1.3 et d'après la relation 2.29, le champ ${\bf E}$ peut être exprimé en fonction du potentiel vecteur défini à un gradient près. On a alors :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x},t)}{\partial t} - \mathbf{grad}(\varphi(\mathbf{x},t) + \varphi_s)$$
(2.30)

où φ représente le potentiel scalaire électrique défini au paragraphe 2.1.2. Si on considère seulement des conducteurs en court-circuit le potentiel φ_s est nul ⁶.

En remplaçant le champ magnétique \mathbf{H} et la densité de courant $\mathbf{J_{ind}}$ par leurs expressions en fonction de \mathbf{A} et φ , et, en tenant compte de la loi de comportement 1.46, la forme locale du théorème d'Ampère 1.25 et la loi de conservation de la densité de courant 1.29 s'écrivent :

$$\mathbf{rot}\frac{1}{\mu}\mathbf{rot}\mathbf{A}\left(\mathbf{x},t\right)+\sigma\left(\frac{\partial\mathbf{A}\left(\mathbf{x},t\right)}{\partial t}+\mathbf{grad}\,\varphi\left(\mathbf{x},t\right)\right)=\mathbf{J}_{s}\left(\mathbf{x},t\right)+\frac{1}{\mu}\mathbf{rot}\mathbf{B}_{r}\tag{2.31}$$

$$\operatorname{div} \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A} (\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi (\mathbf{x}, t) \right) = 0$$
 (2.32)

où μ et σ sont constants par sous-domaine.

Une infinité de vecteurs $\bf A$ peut être définie tels que leur rotationnel soit égal à l'induction magnétique. Pour assurer l'unicité de ce potentiel, une condition de jauge est introduite telle que la jauge de Coulomb $div {\bf A}=0$ ou une condition de forme ${\bf A}\cdot {\bf W}=0$ avec ${\bf W}$ un champ de vecteur dont les lignes de champs ne forment pas de boucles et sont telles qu'elles relient tous les points du domaine [Albanese, Rubinacci 2000], [Kettunen et al 1999] ⁷.

Remarque 2.3.2 Dans le cas de code_Carmel spectral, le problème n'est pas jaugé.

2.3.3 Formulation magnétique $T - \Omega$

La formulation $\mathbf{T}-\Omega$ dans code_Carmel spectral se limite aux problèmes linéaires avec des champs sources de type bobiné.

Dans le cas d'une formulation magnétique, le champ ${\bf H}$ est exprimé en fonction de potentiels et du champ ${\bf H_s}$. Comme la densité de courant induite est à divergence nulle, un potentiel vecteur électrique, noté ${\bf T}$, peut être introduit tel que :

$$\mathbf{J_{ind}}\left(\mathbf{x},t\right) = \mathbf{rot}\,\mathbf{T}\left(\mathbf{x},t\right) \tag{2.33}$$

avec ${f T}$ défini dans le domaine conducteur.

Comme le domaine conducteur est supposé contractile, on prend alors $\mathbf{T} = \mathbf{0}$ à l'extérieur de celui-ci et on impose $\mathbf{T} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ sur la frontière Γ_c de \mathcal{D}_c .

Comme **rot** $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{J}_{ind}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{J}s(\mathbf{x}, t)$, on a :

$$\mathbf{rot}\left(\mathbf{H}\left(\mathbf{x},t\right) - \mathbf{H}_{\mathbf{s}}\left(\mathbf{x},t\right) - \mathbf{T}\left(\mathbf{x},t\right)\right) = \mathbf{0}$$
(2.34)

Le champ ${\bf H}$ peut alors être exprimé en fonction du potentiel vecteur ${\bf T}$ et du champ ${\bf H_s}$ défini à un gradient près. On a alors :

$$\mathbf{H}(\mathbf{x},t) = \mathbf{H_s}(\mathbf{x},t) + \mathbf{T}(\mathbf{x},t) - \mathbf{grad}\,\Omega(\mathbf{x},t) \text{ avec } \mathbf{T} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_c} = \mathbf{0} \text{ et } \Omega|_{\Gamma_H} = 0$$
(2.35)

avec Ω le potentiel scalaire magnétique défini dans tout le domaine.

En introduisant les relations 2.33 et 2.35 dans la forme locale de la loi de Faraday 1.3 et la loi de conservation de l'induction magnétique 1.4, le système à résoudre s'écrit sous la forme :

^{6.} On verra que φ appartient à $\mathbf{H}_{0,B}$ (grad, \mathcal{D}) et \mathbf{A} appartient à $\mathbf{H}_{0,B}$ (rot, \mathcal{D}).

^{7.} On peut faire le choix parfois d'une jauge particulière qui fixe $\varphi = 0$. Il s'agit de la formulation A*. Cette formulation n'est pas disponible dans code_Carmel actuellement

$$\mathbf{rot} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{T} (\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mu \left(\mathbf{T} (\mathbf{x}, t) - \mathbf{grad} \Omega (\mathbf{x}, t) \right) = -\mathbf{rot} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{Hs} (\mathbf{x}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \mathbf{H_s} (\mathbf{x}, t) + \mathbf{B}_r \right)$$

$$(2.36)$$

$$\operatorname{div} \mu \left(\mathbf{T} (\mathbf{x}, t) - \mathbf{grad} \Omega (\mathbf{x}, t) \right) = -\operatorname{div} \left(\mu \mathbf{H_s} (\mathbf{x}, t) + \mathbf{B}_r \right)$$

$$(2.37)$$

où μ et σ sont constants par sous-domaine.

Comme dans le cas de la formulation ${\bf A}$ - φ , une condition de jauge doit être appliquée sur le potentiel vecteur ${\bf T}$ pour assurer l'unicité. Cette jauge n'est définie que dans le domaine conducteur ${\cal D}_c$.

Remarque 2.3.3 Dans le cas de code_Carmel spectral, le problème n'est pas jaugé.

Chapitre 3

Calcul et imposition des grandeurs globales électromagnétiques

Résumé

Les chapitres précédents ont fourni les équations locales à résoudre dans les cas de la magnétodynamique, de l'électrocinétique et de la magnétostatique. Les sources sont naturellement des densités de courant. Mais dans la pratique, il est intéressant d'imposer d'autres grandeurs physiques comme données. Ainsi, à ces jeux d'équations, peuvent venir s'ajouter des équations globales (souvent sous forme intégrales). Ce chapitre présente ces expressions complémentaires et une façon de les introduire [Korecki 2009].

3.1 Introduction des champs K et N

Considérons le dispositif, compris dans le domaine \mathcal{D} de frontière Γ , représenté sur la figure 3.1). Il est constitué d'un inducteur $(\mathcal{D}_s^i$ de frontière $\Gamma_s^i)$ et du domaine \mathcal{D}_{nc} .

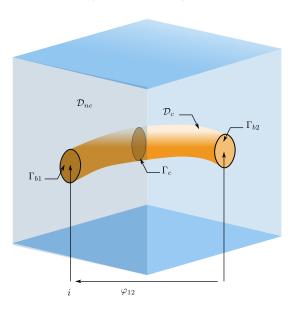


Figure 3.1 – Définition des grandeurs globales et des conditions aux limites du problème étudié

On impose sur les surfaces Γ_{b1} et Γ_{b2} soit un flux de densité de courant I_s soit une différence

de potentiel $V = \varphi_1 - \varphi_2$.

On suppose que la densité de courant $\mathbf{J_s}$, dans l'inducteur est répartie uniformément. De plus, la section S_s^i de l'inducteur est supposée constante. Si on note \mathbf{n} la normale à S_s^i , on peut définir un champ de vecteurs \mathbf{N} tel que :

$$\mathbf{N} = \frac{1}{S_s^i} \mathbf{n} \operatorname{dans} \mathcal{D}_s^i \tag{3.1}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{0} \, \mathrm{dans} \, \mathcal{D}_{nc} \tag{3.2}$$

La composante normale de \mathbf{N} est nulle sur $\Gamma_s^i - (\Gamma_{b1} \cup \Gamma_{b2})$. En outre, de par sa définition, \mathbf{N} est un champ de vecteur à divergence nulle et il permet de définir la géométrie de l'inducteur. Sur la base des propriétés de \mathbf{N} , on peut introduire un vecteur \mathbf{K} tel que :

$$rot K = N (3.3)$$

Si la surface du conducteur n'est pas entièrement en contact avec la surface $\Gamma_h,$ on prendra :

$$\mathbf{K} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_b} = \mathbf{0} \tag{3.4}$$

Dans ces conditions, les vecteurs \mathbf{N} et \mathbf{K} appartiennent respectivement à $\mathbf{H}_{0,x}(div,\mathcal{D})$ et à $\mathbf{H}(\mathbf{rot},\mathcal{D})$. Si Γ_s^i ($\Gamma_{b1} \cup \Gamma_{b2}$) est compris dans Γ_h (problème d'électrocinétique), alors \mathbf{N} appartient toujours à $\mathbf{H}(div,\mathcal{D})$. Par contre, \mathbf{K} appartient alors à $\mathbf{H}(\mathbf{rot},\mathcal{D})$ car la circulation de \mathbf{K} sur Γ_h n'est pas nulle. Il est important de remarquer qu'il existe une infinité de vecteurs \mathbf{K} dont le rotationnel est égal à \mathbf{N} .

Pour les conducteurs massifs, il n'existe pas de lien direct entre la distribution de la densité de courant $\bf J$ et le vecteur $\bf N$. Par contre, dans le cas des conducteurs multifilamentaires, on peut supposer que la densité de courant est répartie uniformément, on a :

$$I_s = \int_{S^i} \mathbf{J}_s \ ds = \mathbf{J}_s \, \mathbf{S}_s^i \tag{3.5}$$

où I_s représente alors le courant qui circule dans l'inducteur. La densité de courant \mathbf{J}_s peut alors s'exprimer en fonction du vecteur \mathbf{N} par la relation :

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{N} I_s \tag{3.6}$$

De plus, à partir des relations 2.28 et 3.3, on a :

$$\mathbf{H}_s = I_s \mathbf{K} \tag{3.7}$$

Les vecteurs \mathbf{N} et \mathbf{K} , qui sont les supports des vecteurs \mathbf{J}_s et \mathbf{H}_s , vont nous permettre de réaliser le couplage entre les équations de l'électromagnétisme et celles du circuit électrique.

3.2 Introduction de la fonction α et du champ β

On définit un champ de vecteurs β ayant les propriétés suivantes :

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_m} = \mathbf{0}$$

$$\int_{\gamma_{12}} \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{dl} = 1$$
(3.8)

Comme le champ β est à rotationnel nul, on définit une fonction scalaire α telle que :

$$\beta = -\operatorname{grad} \alpha$$

$$\alpha|_{\Gamma_m} = Cte$$

$$\alpha_{2-1} = 1$$
(3.9)

27

3.3 Electrocinétique

Les relations précédentes sont appliquées ici au cas d'un modèle en électrocinétique. Selon la formulation, pour imposer les grandeurs globales électriques, il faut vérifier les conditions suivantes :

— pour la tension :

$$V_{\Gamma_{b2}} - V_{\Gamma_{b1}} = \int_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = V \tag{3.10}$$

— pour le courant :

$$\int_{\Gamma_{b1}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, ds = -\int_{\Gamma_{b2}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, ds = I \tag{3.11}$$

ces deux relations peuvent être utilisées pour déterminer la tension, si le courant est imposé et réciproquement après résolution du problème.

3.3.1 Formulation en potentiel vecteur électrique T

La densité de courant peut se décomposer en deux termes : un terme inconnu \mathbf{J}_{ind} et un terme source \mathbf{J}_s .

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{ind} + \mathbf{J}_s \tag{3.12}$$

Dans le cas de cette formulation, il est possible de faire apparaı̂tre le courant I dans l'expression du terme source.

3.3.1.1 Imposition du courant

Le champ de vecteur $\mathbf N$ a les mêmes propriétés que la densité de courant source à I près. Il peut donc être utilisé pour caractériser cette densité de courant source :

$$\mathbf{J}_s = I\,\mathbf{N} \tag{3.13}$$

De cette manière, on vérifie l'équation 3.11 qui s'écrit à présent sous la forme :

$$\int_{\Gamma_{b1}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\Gamma_{b1}} \mathbf{J}_{ind} \cdot \mathbf{n} \, ds + \int_{\Gamma_{b1}} \mathbf{J}_{s} \cdot \mathbf{n} \, ds = I$$

$$\int_{\Gamma_{b2}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\Gamma_{b2}} \mathbf{J}_{ind} \cdot \mathbf{n} \, ds + \int_{\Gamma_{b2}} \mathbf{J}_{s} \cdot \mathbf{n} \, ds = -I$$
(3.14)

Avec:

$$\int_{\Gamma_{b1}} \mathbf{J}_{ind} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0 \text{ et } \int_{\Gamma_{b1}} \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\Gamma_{b1}} I \, \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} \, ds = I$$
 (3.15)

En considérant C, un contour non-contractile défini sur Γ_h , on vérifie également l'équation suivante :

$$\oint_C \mathbf{T} \cdot \mathbf{dl} = I \tag{3.16}$$

Où T désigne le potentiel vecteur électrique, qui, lui-même, se décompose en deux termes :

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_I + \mathbf{T}_S \tag{3.17}$$

En introduisant le potentiel vecteur ${\bf K}$ dans l'expression du terme source ${\bf T}_S,$ la densité de courant s'écrit :

$$\mathbf{J} = \mathbf{rot} \ (\mathbf{T}_I + I \, \mathbf{K}) \tag{3.18}$$

On retrouve ici la notion de coupure (cf. paragraphe 4) :

$$\mathbf{K} \times \mathbf{n} \neq 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_h$$

Elle est réalisée ici grâce au vecteur K.

A l'aide de ce champ de vecteurs, le courant apparaît dans la formulation en potentiel vecteur électrique qui s'écrit à présent sous la forme suivante :

$$\mathbf{rot} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{T}_{I} = -\mathbf{rot} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} (I \mathbf{K})$$
 (3.19)

On montre [Henneron 2004] que l'expression de la tension est donnée par :

$$V = \int_{\mathcal{D}_c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{N} \, d\mathcal{D}_c \tag{3.20}$$

3.3.1.2 Imposition de la tension

Pour imposer la tension dans cette formulation, on utilise l'équation 3.20 que l'on ajoute au système d'équations initial 3.19. Le courant devient alors une inconnue et le système à résoudre s'écrit :

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{T}_{I} + \operatorname{rot} \frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} (I \mathbf{K}) = 0$$

$$\int_{\mathcal{D}_{c}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{N} d\mathcal{D}_{c} = V$$
(3.21)

3.3.2 Formulation en potentiel scalaire électrique φ

Le champ électrique ${\bf E}$ se décompose ici en deux termes : un champ source ${\bf E_S}$ et champ inconnu ${\bf E_I}$ tel que :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E_S} + \mathbf{E_I}
= -\mathbf{grad} \, \varphi_S - \mathbf{grad} \, \varphi_I$$
(3.22)

Ce champ source permet d'introduire la tension V dans l'expression du champ électrique total.

3.3.2.1 Imposition de la tension

Ce champ électrique source a les mêmes propriétés que la champ $\pmb{\beta}$ à V près. Il s'écrit donc sous la forme suivante :

$$\mathbf{E_S} = \boldsymbol{\beta} \, V \tag{3.23}$$

On vérifie alors:

$$\int_{\gamma} \mathbf{E_{S}} \cdot \mathbf{dl} = \int_{\gamma} (\boldsymbol{\beta} V) \cdot \mathbf{dl} = V$$
 (3.24)

Le champ électrique $\mathbf{E_{I}}$ vérifie quant à lui :

$$\int_{\gamma} \mathbf{E}_{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{dl} = 0 \tag{3.25}$$

En utilisant le potentiel α dans l'expression du champ source, on établit la formulation en potentiel électrique φ à tension imposée :

$$\operatorname{div} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi_I = \operatorname{div} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} \alpha V \tag{3.26}$$

Un bilan de puissance fournit l'expression du courant I où le champ de vecteurs β apparaît :

$$I = \int_{\mathcal{D}_c} \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{J} \, d\mathcal{D}_c \tag{3.27}$$

3.3.2.2 Imposition du courant

Pour imposer le courant avec la formulation en potentiel scalaire, on utilise la relation 3.27. On exprime alors β et \mathbf{J} en fonction de α et du potentiel scalaire électrique ϕ_I . La formulation en potentiel scalaire électrique à courant imposé s'écrit :

$$\operatorname{div} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi_{I} + \operatorname{div} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} \alpha V = 0$$

$$\int_{\mathcal{D}_{c}} \operatorname{\mathbf{grad}} \alpha \cdot \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} (\varphi_{I} + \alpha V) d\mathcal{D}_{c} = I$$
(3.28)

La tension devient alors une inconnue lorsque l'on impose le courant.

3.3.3 Bilan des impositions de grandeurs globales en électrocinétique

Imposer un courant avec la formulation en potentiel vecteur et une différence de potentiel avec la formulation en potentiel scalaire est naturel. Dans ce cas, on fait apparaître les grandeurs globales en agissant sur les termes sources. A l'inverse, si l'on souhaite imposer une tension avec la formulation en potentiel vecteur et un courant avec la formulation en potentiel scalaire, il est nécessaire de rajouter une équation issue d'un bilan de puissance, établie à l'aide des champs de vecteurs \mathbf{N} ou $\boldsymbol{\beta}$.

Le tableau (cf. tableau 3.1) récapitule les deux formulations en potentiel utilisées en électrocinétique avec imposition des grandeurs globales électriques.

Formulations	Imposition de la tension	Imposition du courant
	1. 1 (, 17) 0	$\operatorname{div} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} \left(\mathbf{J}_{\mathbf{I}} + \alpha \ V \right) = 0$
φ	$\operatorname{div} \sigma \mathbf{grad} \ (\varphi_I + \alpha \ V) = 0$	$\int_{\mathcal{D}_c} \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{J} d\mathcal{D}_c = I$
T	$\operatorname{rot}_{\sigma} \frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} \left(\mathbf{T}_{I} + I \mathbf{K} \right) = 0$	$\mathbf{rot} - \mathbf{rot} (\mathbf{T}_I + I \mathbf{K}) = 0$
	$\int_{\mathcal{D}_c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{N} d\mathcal{D}_c = V$	$\frac{100}{\sigma} \frac{100}{(17+110)} = 0$

Tableau 3.1 – Imposition de grandeurs globales en électrocinétique

Ces champs de vecteurs sont utilisables sur des systèmes nécessitant la prise en compte de plusieurs sources électriques (courants et/ou tensions). On peut définir plusieurs différences de potentiels électriques ainsi que plusieurs sources de courant en fonction des grandeurs à déterminer.

3.4 Magnétostatique

3.4.1 Formulation A

3.4.1.1 Imposition d'un flux

L'induction magnétique se décompose en deux termes : un terme source ${\bf B}_s$ et un terme inconnu ${\bf B}_i$ tel que :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_s + \mathbf{B}_i$$

Le terme source est exprimé en fonction d'un champ de vecteurs N ou K et du flux ϕ :

$$\mathbf{B}_s = \mathbf{N}\,\phi = \mathbf{rot}\,\mathbf{K}\,\phi \tag{3.29}$$

Le champ inconnu \mathbf{B}_i permet d'introduire le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} tel que :

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{rot}\,\mathbf{A}$$

Le flux apparaı̂t alors dans la formulation à l'aide de l'induction source \mathbf{B}_s :

$$\operatorname{\mathbf{rot}} \frac{1}{\mu} \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{A} = \mathbf{J}_s - \operatorname{\mathbf{rot}} \frac{1}{\mu} \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{K} \phi$$
 (3.30)

3.4.1.2 Imposition d'une différence de potentiels magnétiques

En ne tenant compte que des grandeurs globales magnétiques, ϵ et ϕ , l'énergie magnétique peut s'écrire sous la forme suivante :

$$W = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \, d\tau = \frac{1}{2} \, \epsilon \cdot \phi \tag{3.31}$$

Après développement, la différence de potentiels magnétiques ϵ qu'entraı̂ne l'imposition du flux, s'écrit :

$$\epsilon = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{N} \, d\tau \tag{3.32}$$

En associant cette équation à la formulation précédemment trouvée, la différence de potentiels magnétiques peut être imposée :

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{K} \phi = \mathbf{J}_{s}$$

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} (\mathbf{A} + \mathbf{K} \phi) \cdot \mathbf{N} d\tau = \epsilon$$
(3.33)

3.4.2 Formulation en Ω

3.4.2.1 Imposition d'un flux

Toujours à l'aide du bilan 3.31, on peut établir une expression du flux en fonction de l'induction $\bf B$ et de la fonction m eta

$$\phi = \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B} \, d\tau \tag{3.34}$$

Comparativement à la formulation en potentiel électrique scalaire φ , l'équation 3.34 est utilisée pour imposer le flux magnétique à l'aide de la formulation en potentiel scalaire magnétique Ω :

$$\operatorname{div} \mu \operatorname{\mathbf{grad}} \Omega + \operatorname{div} \mu \operatorname{\mathbf{grad}} \alpha \epsilon = \operatorname{div} \mu \operatorname{\mathbf{H}}_{s}$$

$$\int_{\mathcal{D}} \operatorname{\mathbf{grad}} \alpha \cdot \mu \left(\operatorname{\mathbf{grad}} \left(\Omega + \alpha \epsilon \right) - \operatorname{\mathbf{H}}_{s} \right) d\tau = \phi$$
(3.35)

3.4.2.2 Imposition d'une différence de potentiels magnétiques

Dans le cas de la formulation en potentiel scalaire, l'imposition d'une différence de potentiels magnétiques ϵ nécessite d'ajouter un terme \mathbf{H}_G qui s'exprime en fonction du champ de vecteurs $\boldsymbol{\beta}$:

$$\int_{\gamma} \mathbf{H}_G \cdot \mathbf{dl} = \int_{\gamma} (\beta \, \epsilon) \cdot \mathbf{dl} = \epsilon \tag{3.36}$$

avec γ , un parcours quelconque reliant Γ_{H1} et Γ_{H2} .

Le champ magnétique \mathbf{H} se décompose alors en trois termes :

- Le terme inconnu \mathbf{H}_I qui introduit le potentiel scalaire magnétique Ω ;
- Le terme source \mathbf{H}_s relatif à la présence d'inducteurs;
- Le terme \mathbf{H}_G qui correspond à l'introduction de la grandeur globale ϵ , la différence de potentiels magnétiques.

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_I + \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_G = -\mathbf{grad}\,\Omega + \mathbf{H}_s - \mathbf{grad}\,\alpha\,\epsilon \tag{3.37}$$

La formulation en potentiel scalaire magnétique s'écrit alors :

$$\operatorname{div} \, \mu \operatorname{\mathbf{grad}} \Omega = -\operatorname{div} \, \mu \operatorname{\mathbf{grad}} \alpha \, \epsilon + \operatorname{div} \, \mu \operatorname{\mathbf{H}}_s \tag{3.38}$$

3.4.3 Bilan des impositions de grandeurs globales en magnétostatique

Comme pour les formulations de l'électrocinétique, certaines grandeurs apparaissent naturellement dans les formulations, comme le flux pour la formulation en potentiel vecteur magnétique A et la différence de potentiels magnétiques pour la formulation en potentiel scalaire magnétique Ω . Grâce aux outils introduits, il est possible d'utiliser l'une ou l'autre pour résoudre un problème à flux ou à différences de potentiels magnétiques imposés.

Le tableau ci-dessous regroupe les différentes formulations de la magnétostatique en fonction des grandeurs que l'on souhaite imposer.

Formulations	Imposition de la ddp magnétique	Imposition du flux
Ω	div $\mu \left(\mathbf{grad} \left(\Omega + \alpha \epsilon \right) - \mathbf{H}_s \right) = 0$	$\operatorname{div} \mu \left(\operatorname{\mathbf{grad}} \left(\Omega + \alpha \epsilon \right) - \mathbf{H}_s \right) = 0$
		$\int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B} d\tau \qquad = \phi$
A	$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{K} \phi = \mathbf{J}_{s}$ $\int \frac{1}{r} \operatorname{rot} (\mathbf{A} + \mathbf{K} \phi) \cdot \mathbf{N} d\tau = \epsilon$	$\mathbf{rot}rac{1}{\mu}\mathbf{rot}\mathbf{A}+\mathbf{rot}rac{1}{\mu}\mathbf{rot}\mathbf{K}\phi=\mathbf{J}_{s}$
A	$\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} (\mathbf{A} + \mathbf{K} \phi) . \mathbf{N} d\tau = \epsilon$	$\operatorname{\mathbf{rot}}rac{1}{\mu}\operatorname{\mathbf{rot}}\mathbf{A}+\operatorname{\mathbf{ro}}$

Tableau 3.2 – Imposition de grandeurs globales en magnétostatique

3.5 Magnétodynamique

3.5.1 Formulation A - φ

3.5.1.1 Imposition d'une tension dans un conducteur bobiné

L'intensité du courant notée i est inconnue. Le couplage sera réalisé à l'aide du flux de l'induction magnétique que l'on notera ϕ . En utilisant le vecteur \mathbf{K} , le flux ϕ a pour expression [Le Menach 1999] :

$$\phi = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{K} \, d\mathcal{D} \tag{3.39}$$

L'intérêt de cette expression devant la forme classique du flux $\phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ est son intégrale de volume. En effet, si la géométrie de l'inducteur est complexe, il est délicat de déterminer en 3D la surface délimitée par l'inducteur. Dans ce cas, il est difficile de calculer le flux de \mathbf{B} à travers une telle surface. Comme le champ de vecteur \mathbf{K} doit être calculé pour déterminer le champ source, cela n'engendre aucune difficulté supplémentaire. Sa forme générale facilite le couplage avec les formulations. Pour cela, on introduit la relation 3.39 dans la loi de Faraday et on obtient ainsi :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{K} \, d\mathcal{D} = V - R \, i \tag{3.40}$$

où:

- V représente la différence de potentiel entre les bornes de l'inducteur;
- R désigne la résistance de l'inducteur;
- i est le courant traversant l'inducteur.

Dans l'équation 3.39 l'induction magnétique peut être remplacée par le rotationnel de A. On obtient alors une expression de la forme **rot** A . K qui peut être transformée en utilisant les propriétés des opérateurs vectoriels. Compte tenu des conditions aux limites sur A et K, on obtient :

$$\phi = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{rot} \, \mathbf{K} \, d\mathcal{D} \tag{3.41}$$

En utilisant la relation 3.3, le flux de l'induction magnétique dans un enroulement composé d'inducteurs filaires s'écrit alors :

$$\phi = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{N} \, d\mathcal{D} \tag{3.42}$$

On en déduit l'expression des équations en tension imposée sur un conducteur filaire :

$$\operatorname{\mathbf{rot}} \frac{1}{\mu} \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{A} - \mathbf{N} i = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{N} d\mathcal{D} + R i = V$$
(3.43)

3.5.1.2 Imposition d'un flux et d'une tension dans un conducteur massif

Pour la formulation $\mathbf{A} - \varphi$, les grandeurs globales qui apparaissent naturellement sont : le flux magnétique (via l'introduction du terme source $\mathbf{N} \phi$) ainsi que la différence de potentiels électriques (à l'aide du champ électrique source $\boldsymbol{\beta} V$). Elles apparaissent en décomposant l'induction magnétique \mathbf{B} (3.44) et le champ électrique \mathbf{E} en termes sources et inconnues :

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot} \ (\mathbf{A} + \mathbf{K} \phi) \tag{3.44}$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad} \ (\phi + \alpha V) - \frac{\partial \left(\mathbf{A} + \mathbf{K} \phi\right)}{\partial t}$$
 (3.45)

La formulation $\mathbf{A} - \varphi$ à flux et tensions imposés s'écrit alors :

$$\begin{cases}
\mathbf{rot} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} (\mathbf{A} + \mathbf{K} \phi) = -\sigma \left(\frac{\partial (\mathbf{A} + \mathbf{K} \phi)}{\partial t} + \mathbf{grad} (\phi + \alpha V) \right) \\
\operatorname{div} \sigma \left(\frac{\partial (\mathbf{A} + \mathbf{K} \phi)}{\partial t} + \mathbf{grad} (\phi + \alpha V) \right) = 0
\end{cases} (3.46)$$

3.5.1.3 Imposition d'une force magnétomotrice et d'un courant électrique dans un conducteur massif

Pour déterminer ou imposer une différence de potentiels magnétiques ε ainsi qu'un courant I, on utilise le bilan de puissance, qui s'exprime soit en fonction des grandeurs électriques (3.47), soit en fonction des grandeurs magnétiques (3.48) [Henneron 2004] [Henneron et al 2005]

$$P_e = \int_{\mathcal{D}_e} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \, d\tau + \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} \, d\tau = V \, i$$
 (3.47)

$$P_{m} = \int_{\mathcal{D}_{\sigma}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \, d\tau + \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} \, d\tau = \varepsilon \, \frac{\varphi}{dt}$$
 (3.48)

Le bilan de puissance électrique est établi en considérant un système alimenté par une source électrique, et, inversement, le bilan de puissance magnétique est établi en considérant un système alimenté par une source magnétique.

A partir de ces bilans de puissance et à l'aide de la méthode des résidus pondérés, on peut montrer que le courant I ainsi que la différence de potentiels magnétiques ε s'expriment sous les formes suivantes en utilisant les potentiels sources introduits :

$$I = \int_{\mathcal{D}_c} \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{J} \, d\tau \tag{3.49}$$

$$\varepsilon = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{N} \, d\tau - \int_{\mathcal{D}} \mathbf{K} \cdot \mathbf{J} \, d\tau \tag{3.50}$$

L'équation 3.49 est déduite du bilan de puissance électrique 3.47 et l'équation 3.50 est déduite du bilan de puissance magnétique 3.48. La formulation en potentiel $\mathbf{A} - \varphi$ à courant I et à force magnétomotrice ε imposée est obtenue en ajoutant au système d'équations 3.46 les relations 3.49 et 3.50 :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \ \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \ (\mathbf{A} + \mathbf{K} \phi) = -\sigma \ \left(\frac{\partial \left(\mathbf{A} + \mathbf{K} \phi \right)}{\partial t} + \mathbf{grad} \ (\phi + \alpha V) \right) \\ \operatorname{div} \sigma \left(-\frac{\partial \left(\mathbf{A} + \mathbf{K} \phi \right)}{\partial t} - \mathbf{grad} \ (\phi + \alpha V) \right) = 0 \\ \int_{\mathcal{D}_{c}} \beta . \sigma \left(-\frac{\partial \left(\mathbf{A} + \mathbf{K} \phi \right)}{\partial t} - \mathbf{grad} \ (\phi + \alpha V) \right) \ d\tau = I \\ \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \ (\mathbf{A} + \mathbf{K} \phi) \ . \mathbf{N} \ d\tau - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{D}_{c}} \mathbf{K} . \sigma \left(-\frac{\partial \left(\mathbf{A} + \mathbf{K} \phi \right)}{\partial t} - \mathbf{grad} \ (\phi + \alpha V) \right) \ d\tau = \varepsilon \end{cases}$$

$$(3.51)$$

3.5.2 Formulation T - Ω

A l'inverse de la formulation précédente, les grandeurs qui apparaissent naturellement dans cette formulation sont le courant I et la différence de potentiels magnétiques ε .

3.5.2.1 Imposition d'une force magnétomotrice et d'un courant électrique dans un conducteur massif

Pour faire apparaître le courant I et la différence de potentiels magnétiques ε dans cette formulation, la densité de courant J et le champ magnétique H sont décomposés en termes sources et inconnues. Ces grandeurs s'expriment en fonction des champs N, K, β et α (3.52 et 3.53):

$$\mathbf{J} = \mathbf{rot} \ (\mathbf{K} \ I + \mathbf{T}) \tag{3.52}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{K}I + \mathbf{T} - \mathbf{grad} (\Omega + \varepsilon \alpha) \tag{3.53}$$

ces champs sources font naturellement apparaı̂tre ces grandeurs globales au sein de la formulation $\mathbf{T}-\Omega$:

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \ (\mathbf{T} + \mathbf{K} I) = -\frac{\partial}{\partial t} \mu \ (\mathbf{K} I + \mathbf{T} - \mathbf{grad} \ (\Omega + \varepsilon \alpha)) \\ \operatorname{div} \mu \ (\mathbf{K} I + \mathbf{T} - \mathbf{grad} \ (\Omega + \varepsilon \alpha)) = 0 \end{cases}$$
(3.54)

3.5.2.2 Imposition d'un flux et d'une tension

Pour imposer ou calculer un flux ϕ ou une tension V, on établit les équations suivantes à partir des bilans de puissance électrique et magnétique :

$$\phi = \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B} \, d\tau \tag{3.55}$$

$$V = \int_{\mathcal{D}_c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{N} \, d\tau + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{K} \cdot \mathbf{B} \, d\tau$$
 (3.56)

Ces dernières équation permettent d'écrire la formulation $\mathbf{T} - \Omega$ à flux et tension imposés en définissant le courant I ainsi que la différence de potentiels magnétiques ε comme inconnus :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \ \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \ (\mathbf{T} + \mathbf{K} I) = -\frac{\partial}{\partial t} \mu \ (\mathbf{K} I + \mathbf{T} - \mathbf{grad} \ (\Omega + \varepsilon \alpha)) \\ \operatorname{div} \mu \ (\mathbf{K} I + \mathbf{T} - \mathbf{grad} \ (\Omega + \varepsilon \alpha)) = 0 \\ \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\beta} \cdot \mu \ (\mathbf{K} I + \mathbf{T} - \mathbf{grad} \ (\Omega + \varepsilon \alpha)) \ d\tau = \phi \\ \int_{\mathcal{D}_c} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \ (\mathbf{T} + \mathbf{K} I) \cdot \mathbf{N} \ d\tau - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{K} \cdot \mu \ (\mathbf{K} I + \mathbf{T} - \mathbf{grad} \ (\Omega + \varepsilon \alpha)) \ d\tau = V \end{cases}$$

$$(3.57)$$

Les champs de vecteurs \mathbf{N} , \mathbf{K} , $\boldsymbol{\beta}$ et la fonction α servent à imposer plusieurs grandeurs. En effet, en fonction de la nature du problème et de la formulation utilisée, il est possible d'imposer soit un flux magnétique ϕ soit un flux électrique I.

Chapitre 4

Traitement des régions non simplement connexes

Résumé

Si la géométrie est non simplement connexe, l'expression des formulations vue plus haut n'est plus bonne. Les outils présentés dans le chapitre précédent permettent de clarifier les formulations.

4.1 Electrocinétique

Dans le cas d'un problème en électrocinétique, la présence de trous dans le domaine conducteur entraı̂ne des difficultés de modélisation. Le domaine n'est plus simplement connexe. Considérons le domaine conducteur représenté sur la figure 4.1 à travers lequel on souhaite faire circuler un courant I via Γ_{E1} et Γ_{E2} .

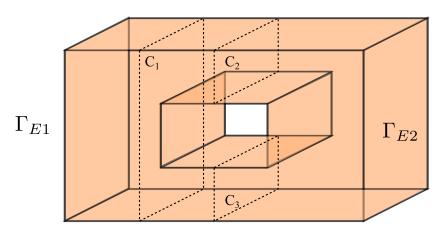


Figure 4.1 – Exemple de domaine non simplement connexe en électrocinétique

La formulation en potentiel scalaire φ n'entraı̂ne pas de précautions particulières à prendre pour résoudre le problème. En effet, quelque soit le parcours non fermé γ entre Γ_{E1} et Γ_{E2} , la condition 3.20 est vérifiée.

En revanche, pour la formulation en potentiel vecteur, en considérant les parcours C_1 , C_2 , C_3 , il faut vérifier :

$$I = \int_{C_1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{ds} \quad I_1 = \int_{C_2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{ds} \quad I_2 = \int_{C_3} \mathbf{J} \cdot \mathbf{ds}$$
 (4.1)

Avec:

$$I = I_1 + I_2 (4.2)$$

Cependant, ni I_1 , ni I_2 ne sont connus. Pour imposer le courant I, un champ de vecteur \mathbf{N} est utilisé. Il est défini tel que :

$$\int_{C_1} \mathbf{N} I \cdot \mathbf{ds} = I \tag{4.3}$$

Pour prendre en compte le fait qu'une partie du courant traverse les surfaces définies par C_2 et C_3 , un champ \mathbf{N}' est utilisé. Ce deuxième terme source, auquel est associé un deuxième courant I', suit un contour du trou (cf. figure 4.2) et vérifie les conditions suivantes :

$$\int_{C_1} \mathbf{N}' I' \cdot \mathbf{ds} = 0 \int_{C_2} \mathbf{N}' I' \cdot \mathbf{ds} = -I' \int_{C_3} \mathbf{N} I' \cdot \mathbf{ds} = I'$$

$$(4.4)$$

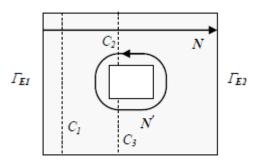


Figure 4.2 – Termes sources N et N' permettant de prendre en compte la non-connexité

Le courant l' devient une inconnue supplémentaire du problème. Ce deuxième terme source peut être comparé à un conducteur en court-circuit aux bornes duquel sera imposée une tension égale à zéro. La tension est imposée en vérifiant l'équation 3.20 et peut s'exprimer en fonction du champ de vecteurs \mathbf{N}' :

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = \int_{\mathcal{D}_c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{N}' \, d\tau = 0 \tag{4.5}$$

Les champs sources ${\bf N}$ et ${\bf N}'$ ainsi définis, vérifient les conditions suivantes :

$$\int_{C_1} \mathbf{N} I \cdot \mathbf{ds} = \oint_{C_1} \mathbf{K} I \cdot \mathbf{dl} = I$$

$$\int_{C_2} (\mathbf{N} I + \mathbf{N}' I') \cdot \mathbf{ds} = \oint_{C_2} (\mathbf{K} I + \mathbf{K}' I') \cdot \mathbf{dl} = I - I' = I_1$$

$$\int_{C_3} \mathbf{N}' I' \cdot \mathbf{ds} = \oint_{C_3} \mathbf{K}' I' \cdot \mathbf{dl} = I' = I_2$$
(4.6)

La frontière Γ_J n'est pas simplement connexe mais les potentiels vecteurs sources $\mathbf{K}I$ et $\mathbf{K}'I'$ jouent le rôle de coupure définie précédemment.

Dans cette configuration, la formulation en potentiel vecteur s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \left(\mathbf{T}_{I} + \mathbf{K} I + \mathbf{K}' I' \right) &= 0 \\ \int_{\mathcal{D}_{c}} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \left(\mathbf{T}_{I} + \mathbf{K} I + \mathbf{K}' I' \right) . \mathbf{N} d\tau &= V_{1} \\ \int_{\mathcal{D}_{c}} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \left(\mathbf{T}_{I} + \mathbf{K} I + \mathbf{K}' I' \right) . \mathbf{N}' d\tau &= 0 \end{cases}$$

$$(4.7)$$

Les courants I et I' sont deux inconnues supplémentaires dans ce cas.

Si le système présente plusieurs trous, autant de termes sources sont ajoutés, augmentant de ce fait le nombre d'équations 4.5 supplémentaires à vérifier.

4.2 Magnétostatique

Pour des cas dont les domaines d'étude ne seraient pas simplement connexes, l'utilisation des champs de vecteurs ${\bf K}$ et ${\bf N}$ serait alors nécessaire. L'utilisation faite pour traiter les cas non simplement connexes en magnétostatique est identique au cas électrocinétique.

Chapitre 5

Forme faible des équations

Résumé

La chapitre précédent a fourni les principales équations pour chacune des applications traitées par code_Carmel : l'électrocinétique, la magnétostatique et la magnétodynamique. Pour arriver à des systèmes plus facilement exploitables, une forme faible de ces équations est utilisée. Ce chapitre détaille le passage à la forme faible pour toutes les applications visées par code_Carmel : magnétodynamique, magnétostatique et électrocinétique.

5.1 Espaces fonctionnels

Les équations de Maxwell forment un ensemble d'équations aux dérivées partielles sur lesquelles sont appliquées différents opérateurs, en particulier rotationnel **rot**, divergence div et gradient **grad**. Afin de construire les formulations variationnelles permettant la résolution des équations, il convient dès lors de construire des espaces dans lesquels ces opérations sont bien définies.

5.1.1 Définitions

Soit \mathcal{D} , un ouvert borné de \mathbb{R}^3 de frontière Γ et soit \mathbf{n} la normale sortante à \mathcal{D} . On désigne par $L^2(\mathcal{D})$ l'espace fonctionnel des fonctions scalaires de carré intégrable sur \mathcal{D} .

$$L^{2}(\mathcal{D}) = \left\{ X \text{ mesurable}; \int_{\mathcal{D}} |X|^{2} < +\infty \right\}$$
 (5.1)

On définit également par $L^{2}(\mathcal{D})$ l'espace fonctionnel des champs vectoriels de carré intégrable sur \mathcal{D} .

$$L^{2}(\mathcal{D}) = \left\{ \mathbf{X} \text{ mesurable}; \int_{\mathcal{D}} \|\mathbf{X}\|^{2} < +\infty \right\}$$
 (5.2)

où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne classique de \mathbb{R}^3 , associé au produit scalaire usuel \mathbf{a} . \mathbf{b} entre deux vecteurs de \mathbb{R}^3 , \mathbf{a} et \mathbf{b} .

Des sous-espaces fonctionnels plus réguliers, pour que l'énergie garde une valeur finie, peuvent être introduits en ajoutant une contrainte relative à chaque opérateur (**grad**, **rot** et div).

$$\begin{array}{lcl} H\left(\mathbf{grad},\mathcal{D}\right) & = & \left\{X \in L^{2}\left(\mathcal{D}\right); \mathbf{grad}\,X \in \boldsymbol{L}^{2}\left(\mathcal{D}\right)\right\} \\ \boldsymbol{H}\left(\mathbf{rot},\mathcal{D}\right) & = & \left\{\mathbf{X} \in \boldsymbol{L}^{2}\left(\mathcal{D}\right); \mathbf{rot}\,\mathbf{X} \in \boldsymbol{L}^{2}\left(\mathcal{D}\right)\right\} \\ \boldsymbol{H}\left(\mathrm{div},\mathcal{D}\right) & = & \left\{\mathbf{X} \in \boldsymbol{L}^{2}\left(\mathcal{D}\right); \mathrm{div}\,\mathbf{X} \in L^{2}\left(\mathcal{D}\right)\right\} \end{array}$$

Dans ce cas, les champs de vecteur \mathbf{H} , \mathbf{B} , \mathbf{J} , \mathbf{E} appartiennent à $\mathbf{L}^2(\mathcal{D})$.

Dans $H(\mathbf{grad}, \mathcal{D})$, X est continu en chaque point de \mathcal{D} . En revanche, pour $H(\mathbf{rot}, \mathcal{D})$, la composante tangentielle de X est continue sur \mathcal{D} , et, pour $H(\mathrm{div}, \mathcal{D})$, la composante normale de X est continue.

En introduisant les conditions aux limites, on restreint les espaces :

$$\begin{array}{lcl} H_0\left(\mathbf{grad},\mathcal{D}\right) & = & \left\{X\in L^2\left(\mathcal{D}\right);\mathbf{grad}\,X\in \boldsymbol{L}^2\left(\mathcal{D}\right);X=0|_{\Gamma}\right\} \\ \\ \boldsymbol{H}_0\left(\mathbf{rot},\mathcal{D}\right) & = & \left\{\mathbf{X}\in\boldsymbol{L}^2\left(\mathcal{D}\right);\mathbf{rot}\,\mathbf{X}\in\boldsymbol{L}^2\left(\mathcal{D}\right);\mathbf{X}\times\mathbf{n}=\mathbf{0}|_{\Gamma}\right\} \\ \\ \boldsymbol{H}_0\left(\mathrm{div},\mathcal{D}\right) & = & \left\{\mathbf{X}\in\boldsymbol{L}^2\left(\mathcal{D}\right);\mathrm{div}\,\mathbf{X}\in L^2\left(\mathcal{D}\right);\mathbf{X}\cdot\mathbf{n}=0|_{\Gamma}\right\} \end{array}$$

Dans ce cas, Γ représente la totalité de la surface englobant \mathcal{D} . En mathématiques, les espaces décrits ci-dessus sont classiques ou "gentils" [Costabel] car les conditions limites sont homogènes. Or, généralement en physique, on peut appliquer des conditions de symétrie ou imposer des conditions aux limites qui engendrent des conditions limites sur les champs de différentes natures. La condition aux limites est imposée sur une partie de Γ nommée ici Γ_x . Dans ce cas, les solutions sont recherchées dans un espace plus large :

$$\begin{array}{lcl} H_{0,x}\left(\mathbf{grad},\mathcal{D}\right) & = & \left\{X\in L^{2}\left(\mathcal{D}\right);\mathbf{grad}\,X\in\boldsymbol{L}^{2}\left(\mathcal{D}\right);X=0|_{\Gamma_{x}}\right\} \\ \\ \boldsymbol{H}_{0,x}\left(\mathbf{rot},\mathcal{D}\right) & = & \left\{\mathbf{X}\in\boldsymbol{L}^{2}\left(\mathcal{D}\right);\mathbf{rot}\,\mathbf{X}\in\boldsymbol{L}^{2}\left(\mathcal{D}\right);\mathbf{X}\times\mathbf{n}=\mathbf{0}|_{\Gamma_{x}}\right\} \\ \\ \boldsymbol{H}_{0,x}\left(\mathrm{div},\mathcal{D}\right) & = & \left\{\mathbf{X}\in\boldsymbol{L}^{2}\left(\mathcal{D}\right);\mathrm{div}\,\mathbf{X}\in L^{2}\left(\mathcal{D}\right);\mathbf{X}\cdot\mathbf{n}=0|_{\Gamma_{x}}\right\} \end{array}$$

On introduit également l'espace fonctionnel $L^2(\mathcal{T})$ des fonctions scalaires de carré intégrable sur l'intervalle de temps \mathcal{T} . Ceci conduit à introduire les espaces ¹:

$$S_{x}^{0}(\mathcal{D}) = H_{0,x}(\mathbf{grad}, \mathcal{D}) \otimes L^{2}(\mathcal{T})$$

$$S_{x}^{1}(\mathcal{D}) = \mathbf{H}_{0,x}(\mathbf{rot}, \mathcal{D}) \otimes L^{2}(\mathcal{T})$$

$$S_{x}^{2}(\mathcal{D}) = \mathbf{H}_{0,x}(\operatorname{div}, \mathcal{D}) \otimes L^{2}(\mathcal{T})$$
(5.3)

5.1.2 Propriété des espaces fonctionnels continus

En électromagnétisme, lorsqu'on applique l'opérateur gradient à un champ scalaire appartenant à H (**grad**, \mathcal{D}), le champ de vecteurs résultant se retrouve dans H (**rot**, \mathcal{D}). Un constat identique peut être effectué lorsqu'on applique l'opérateur rotationnel à un champ appartenant à H (**rot**, \mathcal{D}). Le champ résultant se retrouve dans H (div, \mathcal{D}).

Dans ces conditions, on peut créer une suite d'espaces fonctionnels reliés par les opérateurs différentiels. De plus, il existe des propriétés d'inclusion des espaces fonctionnels telles que présentées dans [Bossavit 1993] :

$$\begin{array}{lcl} \operatorname{Im}\left(\boldsymbol{H}\left(\mathbf{rot},\mathcal{D}\right)\right) & \subset & \operatorname{Ker}\left(\boldsymbol{H}\left(\operatorname{div},\mathcal{D}\right)\right) \\ \operatorname{Im}\left(\boldsymbol{H}\left(\mathbf{grad},\mathcal{D}\right)\right) & \subset & \operatorname{Ker}\left(\boldsymbol{H}\left(\mathbf{rot},\mathcal{D}\right)\right) \end{array}$$

Si le domaine \mathcal{D} est simplement connexe et Γ connexe, les inclusions se transforment en égalité :

$$Im (\boldsymbol{H} (\mathbf{rot}, \mathcal{D})) = Ker (\boldsymbol{H} (\operatorname{div}, \mathcal{D}))$$

$$Im (\boldsymbol{H} (\mathbf{grad}, \mathcal{D})) = Ker (\boldsymbol{H} (\mathbf{rot}, \mathcal{D}))$$
(5.4)

Comme ces espaces incluent les espaces H_0 décrits précédemment, on peut écrire que :

^{1.} De manière générale, : $L^{2}(D \times \Omega) \neq L^{2}(D) \times \Omega$, mais $L^{2}(D \times \Omega) = L^{2}(D) \otimes L^{2}(\Omega)$

^{2.} on rappelle que $\mathbf{rot}[\mathbf{grad}] = \mathbf{0}$ et div $[\mathbf{rot}] = 0$.

$$egin{aligned} H_0\left(\mathbf{grad},\mathcal{D}
ight) &\subset & H_{0,x}\left(\mathbf{grad},\mathcal{D}
ight) \ & oldsymbol{H}_0\left(\mathbf{rot},\mathcal{D}
ight) &\subset & oldsymbol{H}_{0,x}\left(\mathbf{rot},\mathcal{D}
ight) \ & oldsymbol{H}_0\left(\mathrm{div},\mathcal{D}
ight) &\subset & oldsymbol{H}_{0,x}\left(\mathrm{div},\mathcal{D}
ight) \end{aligned}$$

5.1.3 Les champs électromagnétiques

A partir de ces définitions, il est possible d'établir dans le cas le plus général (version spectrale):

$$\mathbf{B} \in \mathcal{S}_{b}^{2}(\mathcal{D})$$

$$\mathbf{J} \in \mathcal{S}_{h}^{2}(\mathcal{D}_{c})$$

$$\mathbf{H} \in \mathcal{S}_{h}^{1}(\mathcal{D})$$

$$\mathbf{E} \in \mathcal{S}_{b}^{1}(\mathcal{D}_{c})$$

$$(5.5)$$

Si la dimension en temps n'est pas traitée par la méthode des éléments finis (plus exactement projection de Galerkin, cas de la version temporelle), les appartenances se restreignent à :

$$\mathbf{B} \in \boldsymbol{H}_{0,b} \left(\operatorname{div}, \mathcal{D} \right)$$

$$\mathbf{J} \in \boldsymbol{H}_{0,h} \left(\operatorname{div}, \mathcal{D}_{c} \right)$$

$$\mathbf{H} \in \boldsymbol{H}_{0,h} \left(\mathbf{rot}, \mathcal{D} \right)$$

$$\mathbf{E} \in \boldsymbol{H}_{0,b} \left(\mathbf{rot}, \mathcal{D}_{c} \right)$$

$$(5.6)$$

5.1.4 Les potentiels

Appliquons le même raisonnement pour les potentiels scalaire et vecteur. Pour le potentiel vecteur \mathbf{A} , défini à partir de l'équation 2.29, il appartient aux mêmes espaces que \mathbf{H} .

$$\mathbf{A} \in \boldsymbol{H}_{0,b}\left(\mathbf{rot}, \mathcal{D}\right) \tag{5.7}$$

En revanche, si on applique la jauge de Coulomb :

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$$

il doit satisfaire à la fois les conditions sur $\mathbf{H}(\text{div}, \mathcal{D})$ et $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \mathcal{D})$. Enfin, si on applique une jauge de type :

$$(\mathbf{A}, \mathbf{grad}\,\xi) = 0, \quad \forall \xi \in H_0^1(\mathcal{D})$$

Alors il faut définir deux nouveaux espaces tels que :

$$P_{0}(\mathcal{D}) = \{\mathbf{X} \in \boldsymbol{H}_{0}(\mathbf{rot}, \mathcal{D}); (\mathbf{X}, \mathbf{grad}\,\xi) = 0; \ \forall \, \xi \in H_{0}(\mathbf{grad}, \mathcal{D})\}$$

$$P_{0,x}(\mathcal{D}) = \{\mathbf{X} \in \boldsymbol{H}_{0,x}(\mathbf{rot}, \mathcal{D}); (\mathbf{X}, \mathbf{grad}\,\xi) = 0; \ \forall \, \xi \in H_{0,x}(\mathbf{grad}, \mathcal{D})\}$$
(5.8)

A l'aide de ces deux nouveaux espaces, il est possible d'établir que :

$$\mathbf{A} \in P_0(\mathcal{D}) \tag{5.9}$$

ou

$$\mathbf{A} \in P_{0,x}\left(\mathcal{D}\right) \tag{5.10}$$

Mais, contrairement aux espaces $H_0(\mathbf{rot}, \mathcal{D})$ et $H_{0,x}(\mathbf{rot}, \mathcal{D})$, il n'est pas possible d'établir que $P_0(\mathcal{D})$ est inclus dans $P_{0,x}(\mathcal{D})$. En effet, la jauge décrite dans $P_{0,x}(\mathcal{D})$ nécessite que ξ doit satisfaire plus de contraintes car $H_{0,x}(\mathbf{rot}, \mathcal{D})$ contient $H_0(\mathbf{rot}, \mathcal{D})$.

Par conséquent, l'espace qui satisfait :

$$\{(X,\operatorname{\mathbf{grad}}\xi)=0;\ \forall \xi\in H_{0,x}\left(\operatorname{\mathbf{grad}},\mathcal{D}\right)\}$$

contient l'espace :

$$\{(X, \operatorname{\mathbf{grad}} \xi) = 0; \forall \xi \in H_0(\operatorname{\mathbf{grad}}, \mathcal{D})\}\$$

Le potentiel vecteur électrique \mathbf{T} a les mêmes propriétés que \mathbf{A} mais il existe uniquement dans \mathcal{D}_c . Donc, en fonction de la jauge utilisée, on a soit :

$$\mathbf{T} \in \boldsymbol{H}_{0,x}(\operatorname{div}, \mathcal{D}_c) \wedge \boldsymbol{H}_{0,h}(\mathbf{rot}, \mathcal{D}_c)$$
 pour la jauge de Coulomb (5.11)

soit:

$$\mathbf{T} \in P_0(\mathcal{D}_c)$$
 pour la jauge de Coulomb (5.12)

ou:

$$\mathbf{T} \in P_{0,h}(\mathcal{D}_c)$$
 pour l'autre jauge (5.13)

Finissons par les potentiels scalaires φ et Ω qui sont respectivement dans $H_{0,b}\left(\mathbf{grad},\mathcal{D}_{c}\right)$ et $H_{0,h}\left(\mathbf{grad},\mathcal{D}\right)$.

5.2 Principes de projection

Les formulations peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}(U) + f = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}$$
 (5.14)

$$C(U) + f_s = 0 \quad \text{sur } \Gamma \tag{5.15}$$

où \mathcal{L} et \mathcal{C} sont des opérateurs, quant à f et f_s , ils représentent des termes sources généralement connus.

En appliquant la méthode des résidus pondérés [Dhatt, Thouzot 1984], on obtient les formes intégrales suivantes suivant la nature des fonctions-tests. Si la dépendance en temps est explicitement prise en compte (version spectrale) :

$$\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \mathcal{U}. \left(\mathcal{L} \left(U \right) + f \right) d\mathcal{D} = 0$$
 (5.16)

Si ce n'est pas le cas (version temporelle) :

$$\int_{\mathcal{D}} \mathcal{U}.\left(\mathcal{L}\left(U\right) + f\right) d\mathcal{D} = 0 \tag{5.17}$$

Si U est solution de l'équation 5.16 ou 5.17 et vérifie les conditions aux limites définies par 5.15 pour toutes les fonctions tests \mathcal{U} alors, U est aussi solution de l'équation 5.14. Toutefois, afin de diminuer l'ordre de dérivation, on effectue souvent une intégration par parties. On obtient ainsi les formes intégrales faibles que nous sommes généralement amenés à résoudre :

$$\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \mathcal{U}.\mathcal{L}_{D}(U) \, d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{T}} \int_{\Gamma} \mathcal{U}.\mathcal{S}_{L}(U) \, d\gamma + \int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \mathcal{U} \, f \, d\mathcal{D} = 0$$
 (5.18)

$$\int_{\mathcal{D}} \mathcal{U}.\mathcal{L}_{D}(U) \ d\mathcal{D} + \int_{\Gamma} \mathcal{U}.\mathcal{S}_{L}(U) \ d\gamma + \int_{\mathcal{D}} \mathcal{U} f \ d\mathcal{D} = 0$$
 (5.19)

où \mathcal{L}_D et \mathcal{S}_L sont des opérateurs.

Pour résoudre les formulations sous leur forme faible dans les espaces fonctionnels définis dans les paragraphes précédents, on prendra, par la suite, les fonctions tests \mathcal{U} égales aux fonctions d'interpolations (méthode de Galerkin).

5.3 Problème magnétodynamique

5.3.1 Formulation A - φ

Nous appliquons la méthode précédente aux équations de la magnétodynamique avec une fonction test $\mathcal U$ convenablement choisie.

5.3.1.1 Projection en espace uniquement

La formulation A - φ s'écrit alors sous la forme suivante sans la dimension en temps (version temporelle) :

$$\int_{\mathcal{D}} \mathcal{U} \cdot \left[\mathbf{rot} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} + \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) \right] d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \mathcal{U} \cdot \left[\mathbf{J_s} + \frac{1}{\mu} \mathbf{B}_r \right] d\mathcal{D}$$
 (5.20)

Dans un premier temps, une fonction test est choisie pour le potentiel vecteur magnétique :

$$\mathcal{U} = \mathbf{A}' \quad \mathbf{A}' \in \mathbf{H}_{0,b} \left(\mathbf{rot}, \mathcal{D} \right)$$

On intègre par partie le premier morceau.

$$\int_{\mathcal{D}} \mathbf{A}' \cdot \mathbf{rot} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} \, d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A}' \, d\mathcal{D} + \int_{\partial \mathcal{D}} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} \times \mathbf{A}' \right) \cdot d\boldsymbol{\gamma} \tag{5.21}$$

où $\partial \mathcal{D} = \Gamma$ est le bord de \mathcal{D} .

Si l'on désigne par ${\bf n}$ la normale sortante, en posant $d\gamma={\bf n}$. $d\gamma$, l'équation précédente devient :

$$\int_{\mathcal{D}} \mathbf{A}' \cdot \mathbf{rot} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} \, d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A}' \, d\mathcal{D} - \int_{\Gamma} (\mathbf{H} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{A}' \, d\gamma \tag{5.22}$$

On obtient alors:

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A}' + \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) \cdot \mathbf{A}' \right] d\mathcal{D} =
\int_{\mathcal{D}} \mathbf{J}_{s} \cdot \mathbf{A}' d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{B}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}' d\mathcal{D} + \int_{\Gamma} (\mathbf{H} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{A}' d\gamma \quad (5.23)$$

Rappelons que (cf. paragraphe 1.7):

$$\Gamma = \Gamma_B \cup \Gamma_H$$

Sur Γ_B , on impose une condition de Dirichlet homogène sur ${\bf A}$ (idem sur ${\bf A}'$) :

$$\mathbf{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_B \tag{5.24}$$

Ainsi, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$.

Sur Γ_H , on impose une condition de Neumann homogène sur ${\bf A}$:

$$\mathbf{H} \times \mathbf{n} = \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \, \mathbf{A}\right) \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \tag{5.25}$$

Ainsi, le terme de bord (sur Γ) s'annule.

Dans un second temps, une fonction-test est choisie pour le potentiel scalaire électrique :

$$\mathcal{U} = \mathbf{grad}\varphi' \quad \varphi' \in H_{0,h}(qrad, \mathcal{D}_c)$$

Alors:

$$\int_{\mathcal{D}}\mathbf{grad}\varphi'\,.\,\left[\mathbf{rot}\frac{1}{\mu}\mathbf{rot}\mathbf{A}+\sigma\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\mathbf{grad}\,\varphi\right)\right]\,d\mathcal{D}-\int_{\Gamma}\mathbf{grad}\varphi'\,.\,\left(\mathbf{n}\times\mathbf{H}\right)d\gamma=0$$

Soit:

$$\int_{\mathcal{D}} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi' \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi \right) d\mathcal{D} - \int_{\Gamma} \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi' \cdot \left(\mathbf{n} \times \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} \right) \right) d\gamma = 0$$
 (5.26)

Le terme surfacique vaut :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{grad} \varphi' \cdot \left(\mathbf{n} \times \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} \right) \right) d\gamma = -\int_{\Gamma} \varphi' \operatorname{div} \left(\mathbf{n} \times \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} \right) d\gamma
= \int_{\Gamma} \varphi' \mathbf{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} \right) \cdot \mathbf{n} d\gamma
= \int_{\Gamma} \varphi' \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) \cdot \mathbf{n} d\gamma$$

On rappelle que:

$$\mathbf{J}_{ind} = \sigma \, \mathbf{E} = -\sigma \, \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right)$$

Comme nous l'avons montré plus haut, les intégrales de surfaces disparaissent. Cela revient à imposer fortement les conditions aux limites sur Γ_b ($\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$ et $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$) et faiblement celles sur Γ_h ($\mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0$ et $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$).

Alors, l'équation (5.26) s'écrit :

$$\int_{\mathcal{D}} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi' \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi \right) d\mathcal{D} = 0$$
 (5.27)

La première équation correspond à la conservation du flux de la densité de courant et la deuxième, au théorème d'Ampère.

Le système à résoudre en magnétodynamique sans projection en temps est le suivant :

Trouver $\mathbf{A} \in P_{0,x}(\mathcal{D})$ et $\varphi \in H_{0,b}(\mathbf{grad}, \mathcal{D}_c)$ tels que $\forall \mathbf{A}' \in \mathbf{H}_{0,b}(\mathbf{rot}, \mathcal{D}), \forall \varphi' \in H_{0,b}(\mathbf{grad}, \mathcal{D}_c)$

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A}' \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A} + \sigma \mathbf{A}' \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) \right] d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{J}_{s} \cdot \mathbf{A}' d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{B}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}' d\mathcal{D}
\int_{\mathcal{D}} \sigma \mathbf{grad} \varphi' \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) d\mathcal{D} = 0$$
(5.28)

5.3.1.2 Projection en espace et en temps

Si la dimension en temps est traitée (version spectrale), la formulation faible en A - φ s'écrit alors sous la forme suivante, d'après la relation 5.20 :

$$\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \mathcal{U} \cdot \left[\mathbf{rot} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} + \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) \right] d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \mathcal{U} \cdot \left[\mathbf{J_s} + \frac{1}{\mu} \mathbf{B}_r \right] d\mathcal{D}$$
 (5.29)

On intègre par partie le premier morceau.

$$\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \mathcal{U} \cdot \mathbf{rot} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} \, d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{rot} \mathcal{U} \, d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{T}} \int_{\partial \mathcal{D}} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} \times \mathcal{U} \right) \cdot d\gamma \qquad (5.30)$$

où $\partial \mathcal{D} = \Gamma$ est le bord de \mathcal{D} .

Si l'on désigne par ${\bf n}$ la normale sortante, en posant $d\gamma={\bf n}$. $d\gamma$, l'équation précédente devient :

$$\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \mathcal{U} \cdot \mathbf{rot} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} \, d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{rot} \mathcal{U} \, d\mathcal{D} - \int_{\mathcal{T}} \int_{\Gamma} \left(\mathbf{H} \times \mathbf{n} \right) \cdot \mathcal{U} \, d\gamma \tag{5.31}$$

On obtient alors :

$$\begin{split} \int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{rot} \mathcal{U} + \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \, \varphi \right) \cdot \mathcal{U} \right] \, d\mathcal{D} = \\ \int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{J}_{s} \cdot \mathcal{U} \, d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \, \mathbf{B}_{\mathbf{r}} \cdot \mathcal{U} \, d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{T}} \int_{\Gamma} \left(\mathbf{H} \, \times \, \mathbf{n} \right) \cdot \mathcal{U} \, d\gamma \quad (5.32) \end{split}$$

Dans un premier temps, une fonction-test est choisie pour le potentiel scalaire électrique :

$$\mathcal{U} = \mathbf{grad}\varphi' \quad \varphi' \in \mathcal{S}^0_{\mathbf{E}}$$

Soit:

$$\begin{split} \int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{grad} \varphi' \,. \, \left[\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \, \varphi \right) \right] \, d\mathcal{D} - \int_{\mathcal{T}} \int_{\Gamma} \mathbf{grad} \varphi' \,. \, \left(\mathbf{n} \times \mathbf{H} \right) d\gamma = \\ \int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{grad} \varphi' \,. \, \left[\mathbf{J_s} + \frac{1}{\mu} \, \mathbf{B}_r \right] \, d\mathcal{D} \end{split}$$

Ceci donne:

$$\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \sigma \left(\frac{\mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) \cdot \mathbf{grad} \varphi' \, d\mathcal{D} =$$

$$\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{J}_{s} \cdot \mathbf{grad} \varphi' \, d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \, \mathbf{B}_{r} \cdot \mathbf{grad} \varphi' \, d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{T}} \int_{\Gamma} \left(\mathbf{J}^{\Gamma} \times \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{grad} \varphi' \, d\gamma \tag{5.33}$$

Dans un second temps, une fonction-test est choisie pour le potentiel vecteur magnétique :

$$\mathcal{U} = \mathbf{A}' \quad \mathbf{A}' \in \mathcal{S}^1_{\mathbf{E}}$$

Ceci conduit à l'équation :

$$\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \left[\mu^{-1} \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{A} \cdot \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{A}' + \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi \right) \cdot \mathbf{A}' \right] d\mathcal{D} =
\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \left[\mathbf{J}_{s} - \mu^{-1} \mathbf{B}^{r} \right] \cdot \mathbf{A}' d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{T}} \int_{\Gamma} \left(\mathbf{H}^{\Gamma} \times \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{A}' d\gamma$$
(5.34)

Remarque 5.3.1 Les grandeurs A, φ , A' et φ' dépendent du temps.

Le système à résoudre en magnétodynamique avec projection en temps est le suivant :

Trouver $\mathbf{A} \in \mathcal{S}_{\mathbf{E}}^1$ et $\varphi \in \mathcal{S}_{\mathbf{E}}^0$ tels que $\forall \mathbf{A}' \in \mathcal{S}_{\mathbf{E}}^1$, $\forall \varphi' \in \mathcal{S}_{\mathbf{E}}^0$

$$\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \left[\mu^{-1} \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{A} \cdot \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{A}' + \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi \right) \cdot \mathbf{A}' \right] d\mathcal{D} =
\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \left[\mathbf{J}_{s} - \mu^{-1} \mathbf{B}^{r} \right] \cdot \mathbf{A}' d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{T}} \int_{\Gamma_{H}} \left(\mathbf{H}^{\Gamma} \times \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{A}' d\gamma
\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \sigma \left(\frac{\mathbf{A}}{\partial t} + \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi \right) \cdot \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi' d\mathcal{D} =
\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{J}_{s} \cdot \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi' d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{B}_{r} \cdot \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi' d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{T}} \int_{\Gamma_{H}} \left(\mathbf{J}^{\Gamma} \times \mathbf{n} \right) \cdot \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi' d\gamma$$
(5.35)

5.3.2 Formulation $T-\Omega$

5.3.2.1 Projection en espace uniquement

Le système d'équations de la magnétodynamique avec la formulation $T-\Omega$ est rappelée cidessous (cas de la version temporelle de code_Carmel) :

$$\mathbf{rot} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{T} (\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mu (\mathbf{T} (\mathbf{x}, t) - \mathbf{grad} \Omega (\mathbf{x}, t)) = -\mathbf{rot} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{Hs} (\mathbf{x}, t) - \frac{\partial}{\partial t} (\mu \mathbf{H_s} (\mathbf{x}, t) + \mathbf{B}_r) \quad (2.36)$$

$$\operatorname{div} \mu \left(\mathbf{T} \left(\mathbf{x}, t \right) - \operatorname{\mathbf{grad}} \Omega \left(\mathbf{x}, t \right) \right) = -\operatorname{div} \left(\mu \mathbf{H}_{\mathbf{s}} \left(\mathbf{x}, t \right) + \mathbf{B}_{r} \right) \tag{2.37}$$

On multiplie la première expression par une fonction test \mathcal{U} . La formulation T- Ω s'écrit alors sous la forme suivante sans la dimension en temps (version temporelle) :

$$\int_{\mathcal{D}} \mathcal{U} \cdot \left[\mathbf{rot} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{T} + \frac{\partial}{\partial t} \mu \left(\mathbf{T} - \mathbf{grad} \, \Omega \right) \right] d\mathcal{D} =$$

$$- \int_{\mathcal{D}} \mathcal{U} \cdot \left[\mathbf{rot} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{Hs} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \, \mathbf{H_s} + \mathbf{B}_r \right) \right] d\mathcal{D} \quad (5.36)$$

soit:

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{T} \cdot \mathbf{rot} \mathcal{U} + \mathcal{U} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mu \left(\mathbf{T} - \mathbf{grad} \, \Omega \right) \right] d\mathcal{D} - \int_{\partial \mathcal{D}} \left(\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{T} \times \mathcal{U} \right) \cdot \mathbf{n} \, d\gamma =$$

$$- \int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{Hs} \cdot \mathbf{rot} \mathcal{U} + \mathcal{U} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \, \mathbf{H_s} + \mathbf{B}_r \right) \right] d\mathcal{D} + \int_{\partial \mathcal{D}} \left(\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{Hs} \times \mathcal{U} \right) \cdot \mathbf{n} \, d\gamma \quad (5.37)$$

ou encore:

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{T} \cdot \mathbf{rot} \mathcal{U} + \mathcal{U} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mu \left(\mathbf{T} - \mathbf{grad} \Omega \right) \right] d\mathcal{D} - \int_{\partial \mathcal{D}} \left(\frac{1}{\sigma} \mathbf{J} \times \mathbf{n} \right) \cdot \mathcal{U} d\gamma =$$

$$- \int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{Hs} \cdot \mathbf{rot} \mathcal{U} + \mathcal{U} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \mathbf{H_s} + \mathbf{B}_r \right) \right] d\mathcal{D} \quad (5.38)$$

Si on pose dans un premier temps:

$$\mathcal{U} = T' \quad \text{avec } T' \in H_{0,h}\left(\mathbf{rot}, \mathcal{D}\right)$$
 (5.39)

Alors:

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{T} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{T}' + \mathbf{T}' \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mu \left(\mathbf{T} - \mathbf{grad} \, \Omega \right) \right] d\mathcal{D} - \int_{\partial \mathcal{D}} \left(\mathbf{E} \times \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{T}' \, d\gamma =$$

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{Hs} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{T}' + \mathbf{T}' \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \, \mathbf{H_s} + \mathbf{B}_r \right) \right] d\mathcal{D} \quad (5.40)$$

Si on pose dans un second temps:

$$\mathcal{U} = \operatorname{\mathbf{grad}} \Omega' \quad \operatorname{avec} \Omega' \in H_{0,h} \left(\operatorname{\mathbf{grad}}, \mathcal{D} \right)$$
 (5.41)

Alors:

$$\begin{split} \int_{\mathcal{D}} \left[\mathbf{grad} \, \Omega' \, . \, \frac{\partial}{\partial t} \mu \left(\mathbf{T} - \mathbf{grad} \, \Omega \right) \right] \, d\mathcal{D} - \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{T} \times \mathbf{grad} \, \Omega' \, d\gamma = \\ \int_{\mathcal{D}} \left[\mathbf{grad} \, \Omega' \, . \, \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \, \mathbf{H_s} + \mathbf{B}_r \right) \right] \, d\mathcal{D} - \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{Hs} \times \mathbf{grad} \, \Omega' \, d\gamma \quad (5.42) \end{split}$$

Soit:

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\mathbf{grad} \, \Omega' \, \cdot \, \frac{\partial}{\partial t} \mu \left(\mathbf{T} - \mathbf{grad} \, \Omega \right) \right] \, d\mathcal{D} - \int_{\partial \mathcal{D}} \left(\mathbf{E} \, \times \, \mathbf{n} \right) \, \cdot \, \mathbf{grad} \, \Omega' \, d\gamma = \\ \int_{\mathcal{D}} \left[\mathbf{grad} \, \Omega' \, \cdot \, \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \, \mathbf{H_s} + \mathbf{B}_r \right) \right] \, d\mathcal{D} \quad (5.43)$$

Les équations à résoudre sont donc :

Trouver $\mathbf{T} \in P_{0,x}(\mathcal{D})$ et $\Omega \in H_{0,h}(\mathbf{grad}, \mathcal{D})$ tels que $\forall \mathbf{T}' \in \mathbf{H}_{0,h}(\mathbf{rot}, \mathcal{D}), \forall \Omega' \in H_{0,h}(\mathit{grad}, \mathcal{D}_c)$

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{T} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{T}' + \mathbf{T}' \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mu \left(\mathbf{T} - \mathbf{grad} \, \Omega \right) \right] d\mathcal{D} - \int_{\partial \mathcal{D}} \left(\mathbf{E} \times \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{T}' \, d\gamma =$$

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{H} s \cdot \mathbf{rot} \mathbf{T}' + \mathbf{T}' \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \, \mathbf{H_s} + \mathbf{B}_r \right) \right] d\mathcal{D} \quad (5.44)$$

$$\begin{split} \int_{\mathcal{D}} \left[\mathbf{grad} \, \Omega' \, . \, \frac{\partial}{\partial t} \mu \, (\mathbf{T} - \mathbf{grad} \, \Omega) \right] \, d\mathcal{D} - \int_{\partial \mathcal{D}} \left(\mathbf{E} \, \times \, \mathbf{n} \right) \, . \, \mathbf{grad} \, \Omega' \, d\gamma = \\ \int_{\mathcal{D}} \left[\mathbf{grad} \, \Omega' \, . \, \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \, \mathbf{H_s} + \mathbf{B}_r \right) \right] \, d\mathcal{D} \quad (5.45) \end{split}$$

5.3.2.2 Projection en espace et en temps

Et, avec la dimension en temps (avec code_Carmel spectral, on aura pour l'instant $\mathbf{B}_r = \mathbf{0}$), on obtient :

$$\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \mathcal{U} \cdot \left[\mathbf{rot} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{T} + \frac{\partial}{\partial t} \mu \left(\mathbf{T} - \mathbf{grad} \, \Omega \right) \right] d\mathcal{D} =$$

$$- \int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \mathcal{U} \cdot \left[\mathbf{rot} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{H} s + \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \, \mathbf{H_s} + \mathbf{B}_r \right) \right] d\mathcal{D} \quad (5.46)$$

Soit:

$$\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{T} \cdot \mathbf{rot} \mathcal{U} + \mathcal{U} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mu \left(\mathbf{T} - \mathbf{grad} \, \Omega \right) \right] d\mathcal{D} - \int_{\partial \mathcal{D}} \left(\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{T} \times \mathcal{U} \right) \cdot \mathbf{n} \, d\gamma = \\
- \int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{H}_{s} \cdot \mathbf{rot} \mathcal{U} + \mathcal{U} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \, \mathbf{H}_{s} + \mathbf{B}_{r} \right) \right] d\mathcal{D} - \int_{\partial \mathcal{D}} \left(\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{H}_{s} \times \mathcal{U} \right) \cdot \mathbf{n} \, d\gamma = \quad (5.47)$$

La démarche est comparable à celle du paragraphe précédent. Les équations à résoudre sont donc :

Trouver $\mathbf{T} \in \mathcal{S}_h^1(\mathcal{D})$ et $\Omega \in \mathcal{S}_h^0(\mathcal{D})$ tels que $\forall \mathbf{T}' \in \mathcal{S}_h^1(\mathcal{D})$, $\forall \Omega' \in \mathcal{S}_h^0(\mathcal{D})$

$$\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{T} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{T}' + \mathbf{T}' \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mu \left(\mathbf{T} - \mathbf{grad} \, \Omega \right) \right] d\mathcal{D} - \int_{\mathcal{T}} \int_{\partial \mathcal{D}} \left(\mathbf{E} \times \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{T}' \, d\gamma =$$

$$\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{Hs} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{T}' + \mathbf{T}' \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \, \mathbf{H_s} + \mathbf{B}_r \right) \right] d\mathcal{D} \quad (5.48)$$

$$\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \left[\operatorname{grad}\Omega' \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mu \left(\mathbf{T} - \operatorname{\mathbf{grad}}\Omega \right) \right] d\mathcal{D} - \int_{\mathcal{T}} \int_{\partial \mathcal{D}} \left(\mathbf{E} \times \mathbf{n} \right) \cdot \operatorname{\mathbf{grad}}\Omega' d\gamma =
\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \left[\operatorname{\mathbf{grad}}\Omega' \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \mathbf{H_s} + \mathbf{B}_r \right) \right] d\mathcal{D} \quad (5.49)$$

5.4 Problème magnétostatique

Les termes correspondant aux courants induits disparaissent ici.

5.4.1 Formulation A

5.4.1.1 Projection en espace uniquement

La forme intégrale de la formulation à résoudre est donc (cf. équation 2.22 forme forte) :

$$\int_{\mathcal{D}} \mathcal{U} \cdot \left[\left(\mathbf{rot} \, \frac{1}{\mu} \, \mathbf{rot} \mathbf{A} - \mathbf{J}_s - \frac{1}{\mu} \, \mathbf{rot} \mathbf{B}_r \right) \right] d\mathcal{D} = 0 \tag{5.50}$$

Soit:

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathcal{U} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A} \, d\mathcal{D} - \int_{\Gamma} \mathcal{U} \cdot \left(\mathbf{n} \times \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \, \mathbf{A} \right) d\Gamma = \int_{\mathcal{D}} \mathcal{U} \cdot \mathbf{J}_{s} \, d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathcal{U} \cdot \mathbf{rot} \, \mathbf{B}_{r} \, d\mathcal{D}$$
 (5.51)

Si on pose:

$$\mathcal{U} = \mathbf{A}' \quad \text{avec } \mathbf{A}' \in H_{0,b} \left(\mathbf{rot}, \mathcal{D} \right)$$
 (5.52)

Alors, le système à résoudre s'écrit :

Trouver $\mathbf{A} \in P_{0,x}(\mathcal{D})$ tel que $\forall \mathbf{A}' \in \mathbf{H}_{0,b}(\mathbf{rot}, \mathcal{D})$

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A}' \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A} \, d\mathcal{D} - \int_{\Gamma} \mathbf{A}' \cdot \left(\mathbf{n} \times \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \, \mathbf{A} \right) d\Gamma = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{A}' \cdot \mathbf{J}_s \, d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \, \mathbf{A}' \cdot \mathbf{rot} \, \mathbf{B}_r \, d\mathcal{D} \quad (5.53)$$

5.4.1.2 Projection en espace et en temps

En supprimant les termes liés aux courants induits et au domaine conducteur dans l'équation 5.35, on arrive au système suivant à résoudre :

Trouver $\mathbf{A} \in \mathcal{S}_{\mathbf{E}}^1$ tel que $\forall \mathbf{A}' \in \mathcal{S}_{\mathbf{E}}^1$

$$\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \left[\mu^{-1} \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{A} \cdot \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{A}' \right] d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \left[\mathbf{J}_s - \mu^{-1} \mathbf{B}^r \right] \cdot \mathbf{A}' d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{T}} \int_{\Gamma_H} \left(\mathbf{H}^{\Gamma} \times \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{A}' d\gamma$$
(5.54)

5.4.2 Formulation Ω

5.4.2.1 Projection en espace uniquement

La forme intégrale de la formulation à résoudre est donc (cf. équation 2.23) :

$$\int_{\mathcal{D}} \mathcal{U} \left[\operatorname{div} \mu \left(\mathbf{H}_s - \mathbf{grad} \Omega \right) \right] d\mathcal{D} = -\int_{\mathcal{D}} \mathcal{U} \operatorname{div} \mathbf{B}_r d\mathcal{D}$$
 (5.55)

où, \mathbf{H}_s qui représente le champ source, est calculé à partir de \mathbf{J}_s .

Soit:

$$\int_{\mathcal{D}} \mu \left(\mathbf{grad} \, \mathcal{U} \cdot \mathbf{grad} \, \Omega - \mathbf{grad} \, \mathcal{U} \cdot \mathbf{H}_s \right) \, d\mathcal{D} + \int_{\Gamma} \mathcal{U} \left(\mu \, \mathbf{grad} \, \Omega \right) \, d\gamma = -\int_{\mathcal{D}} \mathcal{U} \operatorname{div} \mathbf{B}_r \, d\mathcal{D} \qquad (5.56)$$

On pose:

$$\mathcal{U} = \Omega' \quad \text{avec } \Omega' \in H_{0,h}\left(grad, \mathcal{D}\right)$$
 (5.57)

Alors, le problème se ramène à :

Trouver $\Omega \in H_{0,h}\left(\mathbf{grad},\mathcal{D}\right)$ tel que $\forall \Omega' \in H_{0,h}\left(grad,\mathcal{D}_c\right)$

$$\int_{\mathcal{D}} \mu \left(\mathbf{grad} \, \Omega' \, . \, \mathbf{grad} \, \Omega - \mathbf{grad} \, \Omega' \, . \, \mathbf{H}_s \right) \, d\mathcal{D} + \int_{\Gamma} \Omega' \left(\mu \, \mathbf{grad} \, \Omega \right) \, d\gamma = -\int_{\mathcal{D}} \Omega' \, \mathrm{div} \, \mathbf{B}_r d\mathcal{D} \quad (5.58)$$

5.4.2.2 Projection en espace et en temps

Le système d'équations de la magnétodynamique avec la formulation T- Ω est rappelée cidessous (avec code_Carmel spectral, on aura pour l'instant $\mathbf{B}_r = \mathbf{0}$):

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{T} \left(\mathbf{x}, t \right) + \frac{\partial}{\partial t} \mu \left(\mathbf{T} \left(\mathbf{x}, t \right) - \mathbf{grad} \, \Omega \left(\mathbf{x}, t \right) \right) = \\ - \mathbf{rot} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{Hs} \left(\mathbf{x}, t \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \, \mathbf{H_s} \left(\mathbf{x}, t \right) + \mathbf{B}_r \right) \end{aligned} \tag{2.36}$$

$$\operatorname{div} \mu \left(\mathbf{T} \left(\mathbf{x}, t \right) - \operatorname{\mathbf{grad}} \Omega \left(\mathbf{x}, t \right) \right) = -\operatorname{div} \left(\mu \mathbf{H_s} \left(\mathbf{x}, t \right) + \mathbf{B}_r \right)$$
(2.37)

En magnétostatique, il devient :

$$-\operatorname{div}\mu\left(\operatorname{\mathbf{grad}}\Omega\left(\mathbf{x}\right)\right) = -\operatorname{div}\left(\mu\mathbf{H}_{\mathbf{s}}\left(\mathbf{x}\right) + \mathbf{B}_{r}\right)$$
(5.59)

On multiplie cette expression par une fonction test \mathcal{U} . La formulation Ω s'écrit alors sous la forme suivante (version spectrale) :

$$\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \mathcal{U} \operatorname{div} \mu \left(\operatorname{\mathbf{grad}} \Omega \left(\mathbf{x} \right) \right) d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \mathcal{U} \operatorname{div} \left(\mu \mathbf{H_s} \left(\mathbf{x} \right) + \mathbf{B}_r \right) d\mathcal{D}$$
 (5.60)

Soit:

$$-\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \mu \operatorname{\mathbf{grad}} \mathcal{U} \operatorname{\mathbf{grad}} \Omega (\mathbf{x}) d\mathcal{D} =$$

$$\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \mathcal{U} \operatorname{div} (\mu \mathbf{H_s} (\mathbf{x}) + \mathbf{B}_r) d\mathcal{D} - \int_{\mathcal{T}} \int_{\partial \mathcal{D}} \mathcal{U} \mu \operatorname{\mathbf{grad}} \Omega (\mathbf{x}) . d\partial \mathcal{D} \quad (5.61)$$

Où encore:

$$-\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \mu \operatorname{\mathbf{grad}} \mathcal{U} \cdot \operatorname{\mathbf{grad}} \Omega \left(\mathbf{x} \right) d\mathcal{D} = -\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \left(\mu \mathbf{H_s} \left(\mathbf{x} \right) + \mathbf{B}_r \right) \cdot \operatorname{\mathbf{grad}} \mathcal{U} d\mathcal{D}$$

$$+ \int_{\mathcal{T}} \int_{\partial \mathcal{D}} \mathcal{U} \left(\mu \mathbf{H_s} \left(\mathbf{x} \right) + \mathbf{B}_r \right) \cdot d\partial \mathcal{D} - \int_{\mathcal{T}} \int_{\partial \mathcal{D}} \mathcal{U} \mu \operatorname{\mathbf{grad}} \Omega \left(\mathbf{x} \right) \cdot d\partial \mathcal{D} \quad (5.62)$$

Or:

$$\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \mu \, \mathbf{K} s \, \mathcal{U} \, d\mathcal{D} = -\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \mu \, \mathbf{H} s \, \operatorname{\mathbf{grad}} \mathcal{U} \, d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{T}} \int_{\partial \mathcal{D}} \mathcal{U} \, \mu \, \mathbf{K} s \, d\partial \mathcal{D}$$
 (5.63)

On se ramène alors à :

$$-\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \mu \ \mathbf{grad} \, \mathcal{U} \cdot \mathbf{grad} \, \Omega \left(\mathbf{x} \right) \, d\mathcal{D} = -\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \left(\mu \mathbf{H_s} \left(\mathbf{x} \right) + \mathbf{B}_r \right) \cdot \mathbf{grad} \, \mathcal{U} \, d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{T}} \int_{\partial \mathcal{D}} \mathcal{U} \, \left(\mathbf{B} - \mathbf{B}_r \right) \cdot d\partial \mathcal{D} \quad (5.64)$$

On pose pour la fonction test :

$$\mathcal{U} = \Omega' \quad \text{avec } \Omega' \in H_{0,h}\left(grad, \mathcal{D}\right)$$
 (5.65)

Par conséquent, le système à résoudre se présente comme :

Trouver $\Omega \in H_{0,h}\left(grad, \mathcal{D}\right)$ tel que $\forall \Omega' \in H_{0,h}\left(grad, \mathcal{D}\right)$

$$-\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \mu \operatorname{\mathbf{grad}} \Omega' \cdot \operatorname{\mathbf{grad}} \Omega \left(\mathbf{x} \right) d\mathcal{D} = -\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}} \left(\mu \mathbf{H_s} \left(\mathbf{x} \right) + \mathbf{B}_r \right) \cdot \operatorname{\mathbf{grad}} \Omega' d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{T}} \int_{\partial \mathcal{D}} \Omega' \left(\mathbf{B} - \mathbf{B}_r \right) \cdot d\partial \mathcal{D} \quad (5.66)$$

5.5 Problème électrocinétique

La dimension en temps disparaît ici. Seule la version temporelle est concernée.

5.5.1 Formulation φ

L'équation de la formulation en électrocinétique en potentiel scalaire électrique est rappelée ci-dessus :

$$\operatorname{div} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi = \operatorname{div} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} \alpha V \tag{3.26}$$

En multipliant les deux membres de cette équation par une fonction test \mathcal{U} , la forme intégrale de la formulation est alors :

$$\int_{\mathcal{D}_c} \mathcal{U} \left[\operatorname{div} \sigma \left(\mathbf{grad} \varphi + \mathbf{grad} \alpha V \right) \right] d\mathcal{D}_c \tag{5.67}$$

La forme faible de l'équation a pour expression :

$$\int_{\mathcal{D}_c} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} \mathcal{U} \cdot \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi \, d\mathcal{D}_c + \int_{\Gamma} \mathcal{U} \, \left(\sigma \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi \right) \cdot \operatorname{\mathbf{n}} d\Gamma = -\int_{\mathcal{D}_c} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} \mathcal{U} \cdot \operatorname{\mathbf{grad}} \alpha V \, d\mathcal{D}_c \qquad (5.68)$$

Une fonction test est choisie pour le potentiel scalaire électrique :

$$\mathcal{U} = \varphi' \quad \varphi' \in H_{0,b}\left(qrad, \mathcal{D}_{c}\right)$$

On rappelle que $\Gamma = \Gamma_h \cup \Gamma_b$. Du fait de sa définition dans $\varphi' \in H_{0,x}(grad, \mathcal{D}_c)$ le potentiel φ' est nul sur Γ_b . On impose donc naturellement au sens fort $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ sur Γ_b . De plus, en annulant le calcul de l'intégrale de surface sur Γ_h , on impose $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$ au sens faible.

La forme faible de l'équation est résoudre est alors :

Trouver $\varphi \in H_{0,b}\left(grad, \mathcal{D}_c\right)$ tel que $\forall \varphi' \in H_{0,b}\left(grad, \mathcal{D}_c\right)$

$$\int_{\mathcal{D}_c} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi' \cdot \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi \, d\mathcal{D} = -\int_{\mathcal{D}_c} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi' \cdot \operatorname{\mathbf{grad}} \alpha V \, d\mathcal{D}_c$$
 (5.69)

5.5.2 Formulation T

La forme intégrale de la formulation à résoudre est donc :

$$\int_{\mathcal{D}} \mathcal{U} \cdot \left[\mathbf{rot} \, \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \, \left(\mathbf{T} + \mathbf{H}_s \right) \right] \, d\mathcal{D} = 0 \tag{5.70}$$

En effectuant une intégration par parties, on obtient la forme faible :

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \, \mathcal{U} \cdot \mathbf{rot} \left(\mathbf{T} + \mathbf{H}_s \right) \, d\mathcal{D} - \int_{\Gamma} \mathcal{U} \cdot \left(\mathbf{n} \times \mathbf{E} \right) \, d\Gamma = 0$$
 (5.71)

Si on pose:

$$\mathcal{U} = \mathbf{T}' \quad \text{avec } \mathbf{T}' \in H_{0,h} \left(\mathbf{rot}, \mathcal{D} \right)$$
 (5.72)

Alors, avec $\Gamma = \Gamma_h \cup \Gamma_b$, on a sur Γ_h , $\mathbf{T}' = \mathbf{0}$, on impose donc fortement $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_b} = 0$. Inversement, en annulant l'intégrale de surface sur Γ_b , on assure $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$ au sens faible.

Par conséquent, le problème à résoudre s'écrit :

Trouver $\mathbf{T} \in H_{0,h}\left(\mathbf{rot}, \mathcal{D}\right)$ tel que $\forall \mathbf{T}' \in H_{0,h}\left(\mathbf{rot}, \mathcal{D}\right)$

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{T}' \cdot \mathbf{rot} \left(\mathbf{T} + \mathbf{H}_s \right) d\mathcal{D} = 0$$
(5.73)

Chapitre 6

Le couplage avec les circuits extérieurs

Résumé

Cette partie est consacrée aux méthodes permettant la prise en compte des circuits électriques. Mais avant de présenter ces méthodes, certaines limitations ou hypothèses sont à citer. Le couplage avec un circuit électrique est fonctionnel dans les cas suivants :

- Matériaux linéaires ou non;
- Formulation en potentiel vecteur magnétique;
- Domaines conducteurs non couplés avec un circuit extérieur;
- Prise en compte du mouvement;
- Imposition des tensions dans des circuits électriques.

Les formulations en potentiel \mathbf{A} et $\mathbf{A} - \varphi$ sont dans un premier temps rappelées. Une méthode de résolution de circuit sera présentée et ces deux modèles (magnétique et électrique) seront couplés.

6.1 Décomposition du courant source

Lorsqu'un dispositif est alimenté par n^I inducteurs bobinés, la densité de courant source total $\mathbf{J}_s(\mathbf{X},t)$ se décompose sous la forme :

$$\mathbf{J}_{s}\left(\mathbf{X},t\right) = \sum_{k=1}^{n^{I}} \mathbf{N}_{k}\left(\mathbf{x}\right) i_{k}\left(t\right)$$
(6.1)

où $\mathbf{N}_{k}(\mathbf{x})$ (m^{-2}) est la densité de spires associée à l'inducteur $k,\ k=1,...,n^{I}$ et $i_{k}(t)$ (A) désigne le courant circulant à l'intérieur. $\mathbf{N}_{k}(\mathbf{x})$ peut être définie par :

$$\mathbf{N}_{k}\left(\mathbf{x}\right) = \frac{n_{k}^{s}}{|\Sigma_{k}|} \mathbf{n}_{k}\left(\mathbf{x}\right) \tag{6.2}$$

avec $|\Sigma_k|$ la surface générée par l'inducteur, n_k^s son nombre de spires et \mathbf{n}_k le vecteur unitaire normal à la section de la bobine.

6.2 Équation de circuit

On peut imposer soit le courant circulant dans les inducteurs bobinés soit la tension à leurs bornes. Dans le premier cas, les courants sont des données du problème. Dans le second, le courant circulant à l'intérieur devient une inconnue du problème.

On suppose qu'une tension $v_k(t)$ est imposée aux bornes de l'inducteur k dans un circuit contenant une source de tension $v_k(t)$ en série avec une résistance R_k et une inductance L_k . R_k représente la résistance du bobinage et éventuellement une résistance extérieure, tandis que L_k permet de modéliser les fuites magnétiques associées à des têtes de bobines non modélisées et/ou une inductance extérieure. Finalement, le courant $i_k(t)$ dans ce circuit est solution de :

$$\frac{\partial \phi_{k}(t)}{\partial t} + L_{k} \frac{\partial i_{k}(t)}{\partial t} + R_{k} i_{k}(t) = v_{k}(t)$$

$$(6.3)$$

où ϕ_k est le flux magnétique capté par la bobine k. C'est ce terme qui va être utilisé pour coupler les équations de circuit avec le problème magnéto-quasistatique.

6.2.1 Expression du flux magnétique

Le flux engendré par l'inducteur s'exprime par définition comme :

$$\phi_k = n_k^s \int_{S_k} (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_k) \tag{6.4}$$

où \mathbf{S}_k désigne la surface générée par le contour de la bobine k, comme le montre la figure 6.1.

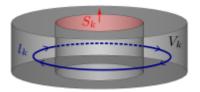


Figure 6.1 – Inducteur bobiné

En appliquant le théorème de Stokes, et en utilisant $\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}$, on a :

$$\phi_k = n_k^s \oint_{l_k} (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_k) = n_k^s \oint_{l_k} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{N}_k) d\mathbf{l}_k$$
(6.5)

où l_k désigne le contour fermé délimitant la surface S_k , montré là encore sur la figure 6.1. En utilisant la définition de \mathbf{N}_k (cf. expression 6.2), on trouve finalement :

$$\phi_k = \int_{V_k} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{N}_k) \ dV_k \tag{6.6}$$

où : $V_k = \oint_{I_k} |\Sigma_k| \, d\mathbf{l}_k$ désigne le volume de l'inducteur.

6.3 Formulation du problème électrique

Dans cette partie seront traités les circuits linéaires constitués de dipôles passifs (R, L et C) ainsi que de sources de tension. Les sources de courants ne sont pas prises en compte car le courant peut être directement appliqué aux inducteurs du problème électromagnétique.

6.3.1 Méthode des courants de mailles

Pour coupler le problème électromagnétique et le problème circuit, la méthode des courants de mailles à été choisie. Dans un premier temps le modèle éléments finis n'intervient pas.

Considérons le circuit représenté sur la figure 6.2 qui peut représenter un couplage étoile de trois phases débitant sur des charges R, L et C.

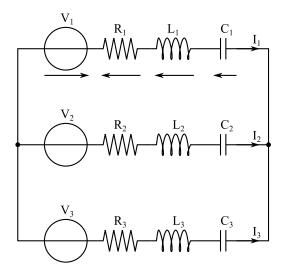


Figure 6.2 – Circuit RLC

Ce circuit possède:

- 12 dipôles (que l'on peut appeler également des branches ou arêtes);
- 11 nœuds (au sens des circuits électriques et des graphes).

Il existe alors " b_{cir} " boucles indépendantes telles que :

$$n_{cir} - a_{cir} + b_{cir} = 1 (6.7)$$

Avec:

- n_{cir} : le nombre de nœuds du circuit;
- a_{cir} : le nombre d'arêtes du circuit;
- b_{cir} : le nombre de boucles du circuit indépendantes.

Le nombre de boucles à considérer de l'exemple est alors de 2. Dans un premier temps, elles seront choisies arbitrairement.

Pour chaque boucle la loi des mailles peut s'écrire sous la forme suivante :

$$KMU = 0 (6.8)$$

Avec:

$$U = U_S + U_R + U_L + U_C (6.9)$$

Où:

- U_S est le vecteur des tensions sources;
- U_R est le vecteur des tensions des dipôles résistifs;
- U_L est le vecteur des tensions des dipôles inductifs;

- U_C est le vecteur des tensions des dipôles capacitifs;
- et KM désigne la matrice d'incidence arête maille (ou boucle de taille $b_{cir} \times a_{cir}$ telle que :
- $KM(b_{cir}, a_{cir}) = 1$, si l'orientation de la boucle b_{cir} est dans le même sens que celui de la tension du dipôle a_{cir} ;
- $KM(b_{cir}, a_{cir}) = -1$, si l'orientation de la boucle b_{cir} est dans le sens opposé à celui de la tension du dipôle a_{cir} ;
- $-KM(b_{cir}, a_{cir}) = 0$, sinon.

Dans le cas présenté sur la figure 6.2, la matrice KM vaut :

$$KM = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$
 (6.10)

Le courant I traversant chaque dipôle peut s'écrire en fonction des courants fictifs J_{cir} parcourant les boucles précédemment déterminées :

$$I_{(n)} = KM^T J_{cir(n)} (6.11)$$

On adopte les notations :

- $I_{(n)}$ désigne le courant à l'itération temporelle t;
- $I_{(n-1)}$ désigne le courant à l'itération temporelle $t \Delta t$;

Avec ces conventions, l'équation 6.9 devient :

$$U_{(n)} = U_{S(n)} + R I_{(n)} + L \frac{I_{(n)} - I_{(n-1)}}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{C} I_{(n)} + U_{C(n-1)}$$
(6.12)

où:

$$I_{C(n)} = C \frac{U_{C(n)} - U_{C(n-1)}}{\Delta t}$$
(6.13)

On résout alors le système suivant :

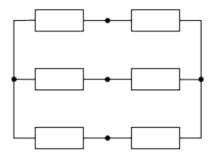
$$KM\left[\mathbf{R} + \frac{\mathbf{L}}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{\mathbf{C}}\right] KM^{T} J_{cir(n)} = -KM \left(U_{S} + U_{C(n-1)}\right) + KM \frac{L}{\Delta t} KM^{T} J_{cir(n-1)}$$
(6.14)

Les matrices ${\bf R}$, ${\bf L}$ et ${\bf C}$ sont carrés de taille égale au nombre de dipôle. Elle contiennent la valeur du dipôle correspondant sur leur diagonale en fonction de la numérotation des branches du circuit. Un exemple est présenté ci-dessous :

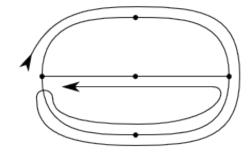
6.3.2 Méthode de calcul de l'arbre du circuit électrique

La détermination des courants de fermetures s'effectue en deux étapes. Les figures 6.3 et 6.4 illustrent les méthodes utilisées.

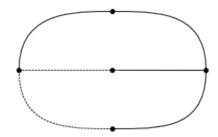
- 1. Calcul d'un arbre
- 2. Calcul des courants de fermetures







(b) Graphe du circuit et parcours de recherche d'arbre



(c) Arbre (en trait plein) et co-arbre (en pointillé)

Figure 6.3 – Calcul de l'arbre d'un circuit

À partir du graphe du circuit (cf. figure 6.3a), les différentes branches sont parcourues pour construire un arbre couvrant. Cet arbre couvrant doit lier tout les nœuds du graphe sans former de boucle.

En parcourant les branches une à une, il est possible de former une boucle sans être passé par toute les branches. Dans ce cas, la méthode consiste à reculer d'une branche et de chercher un autre parcours possible (cf. figure 6.3b).

Et ce jusqu'à obtenir un arbre couvrant (cf. figure 6.3c).

Conjointement à cet arbre, un co-arbre est également calculé. Dans notre exemple, le co-arbre est composé de deux branches. Ce nombre de branches est égal au nombre de boucles indépendantes (voir équation 6.7).

Le calcul des courants de mailles est réalisé en parcourant l'arbre couvrant avec comme branche de départ, les branches du co-arbre. La figure 6.4 présente deux trajets pour les courants de mailles.

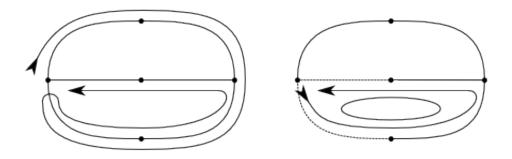


Figure 6.4 – Détermination des boucles de courants indépendantes

Deuxième partie

Aperçus sur les discrétisations spatiale et temporelle

Chapitre 7

Espaces de discrétisation

Résumé

Les formulations développées aux chapitres précédents ne peuvent être résolues de manière analytique du fait des géométries complexes des dispositifs. Pour résoudre ces équations nous avons recours aux méthodes numériques. Le problème doit donc être discrétisé. Les grandeurs locales de l'électromagnétisme, qui sont en fait les inconnues du problème, sont définies dans des suites d'espaces fonctionnels. Nous serons donc amenés à discrétiser les suites d'espaces fonctionnels ainsi que les opérateurs différentiels. Pour ce faire, nous allons définir une structure discrète analogue à celle du domaine continu présentée dans les chapitres précédents.

Pour cela, on a recours à la Méthode des Éléments Finis qui engendre une double discrétisation. La première consiste à décomposer le domaine d'étude (discrétisation spatiale) en petits éléments de formes simples (tétraèdres, prismes, hexaèdres ou pyramides). La deuxième discrétisation est celle des inconnues.

7.1 Espaces d'interpolation

7.1.1 Généralités

En éléments finis, le domaine continu \mathcal{D} est partitionné en sous-domaines de formes simples dans lesquels les équations de Maxwell sont approchées numériquement. Soit donc un maillage éléments finis constitué de n_0 nœuds, n_1 arêtes, n_2 facettes et n_3 éléments volumiques.

Il existe une relation (Euler-Poincaré) entre ces nombres qui s'écrit :

$$n_0 - n_1 + n_2 - n_3 = \xi \tag{7.1}$$

où ξ représente le nombre de Betti qui est égal à 1 plus le nombre de boucle moins le nombre de trou du domaine maillé.

7.1.2 Fonctions de forme

7.1.2.1 Fonction nodale

Aux sommets du maillage, à chaque noeud n, on associe des fonctions scalaires continues nodales w_n^0 . Leur expression dépend du type d'élément utilisé. Avec les fonctions nodales, on peut vérifier la relation en chaque point du domaine :

$$\sum_{n \in \mathcal{N}_h} w_n^0 = 1 \tag{7.2}$$

L'ensemble des fonctions w_n^0 du maillage engendre un espace de dimension finie noté \mathcal{W}^0 . Si une fonction U appartient à \mathcal{W}^0 , on a alors :

$$U = \sum_{n \in \mathcal{N}_h} w_n^0 \, u_n \tag{7.3}$$

 u_n représente la valeur au noeud n de la fonction U. Si on note \mathbf{U}_n le vecteur $(u_n)_{n\in\mathcal{N}_h}$ et \mathbf{W}_n le vecteur contenant les fonctions d'interpolations aux noeuds, l'équation 7.3 s'exprime sous la forme suivante :

$$U = \mathbf{W}_n \, \mathbf{U}_n \tag{7.4}$$

Les propriétés des fonctions d'interpolation w_n^0 imposent que la fonction U est continue sur tout le domaine \mathcal{D} .

7.1.2.2 Fonction d'arête

Soit, comme le montre la figure 7.1 une arête A_{nm} formée par les noeuds N_n et N_m à laquelle on associe la fonction d'arête \mathbf{w}_a^1 .

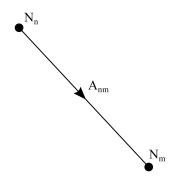


Figure 7.1 – Définition de l'arête A_{nm}

Dans le cas des tétraèdres, on a [Bossavit 1993] :

$$\mathbf{w}_a^1 = w_n^0 \operatorname{\mathbf{grad}} w_m^0 - w_m^0 \operatorname{\mathbf{grad}} w_n^0 \tag{7.5}$$

où w_n^0 et w_m^0 sont les fonctions nodales associées aux noeuds N_n et N_m . La circulation de w_a^1 est égale à 1 le long de l'arête A_{nm} et nulle sur les autres arêtes.

L'ensemble de ces fonctions w_a^1 engendre l'espace des éléments d'arêtes de dimension finie \mathcal{W}^1 . Soit un vecteur **U** appartenant à \mathcal{W}^1 , on a alors

$$\mathbf{U} = \sum_{a \in \mathcal{A}_h} \mathbf{w}_{\mathbf{a}}^1 u_a \tag{7.6}$$

 u_a représente la circulation de ${\bf U}$ le long de l'arête 'a' définie par :

$$u_a = \int_a \mathbf{U} \cdot \mathbf{dl} \tag{7.7}$$

Enfin, à l'interface entre deux éléments, la composante tangentielle de la grandeur discrétisée par les éléments d'arêtes, est conservée.

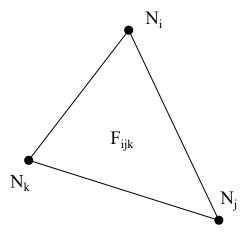


Figure 7.2 – Définition d'une facette triangulaire F_{ijk}

7.1.2.3 Fonction de facette

Selon le type d'élément du maillage, une facette peut être triangulaire ou quadrangulaire. A titre d'exemple, nous avons représenté sur la figure 7.2 une facette triangulaire.

La fonction \mathbf{w}_f associée à une facette triangulaire F_{ijk} s'écrit [Bossavit 1993] :

$$\mathbf{w}_f^2 = 2 \left(w_k^0 \operatorname{\mathbf{grad}} w_i^0 \times \operatorname{\mathbf{grad}} w_j^0 + w_j^0 \operatorname{\mathbf{grad}} w_k^0 \times \operatorname{\mathbf{grad}} w_i^0 + w_i^0 \operatorname{\mathbf{grad}} w_j^0 \times \operatorname{\mathbf{grad}} w_k^0 \right)$$
(7.8)

où w_i^0 , w_j^0 et w_k^0 sont, respectivement, les fonctions d'interpolations aux noeuds N_i , N_j et N_k . On notera \mathcal{W}^2 l'espace des éléments de facettes, engendré par les fonctions w_f^2 .

Du fait de sa définition, le flux de la fonction w_f^2 est égal à l'unité à travers la facette 'f' et, est égal à zéro sur les autres facettes du maillage.

Si on considère une fonction U appartenant à W^2 , elle a pour expression :

$$\mathbf{U} = \sum_{f \in \mathcal{F}_h} \mathbf{w}_{\mathbf{f}}^2 \, u_f \tag{7.9}$$

où u_f représente le flux du vecteur ${\bf U}$ à travers la facette 'f', soit :

$$u_f = \int_f \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \, ds \tag{7.10}$$

Comme la composante normale des fonctions w_f^2 est continue à travers chaque facette, par conséquent, la composante normale d'une fonction appartenant à \mathcal{W}^2 est aussi continue.

7.1.2.4 Fonction de volume

Enfin, sur chaque élément volumique v, nous introduisons la fonction scalaire w_v^3 égale à l'inverse du volume de l'élément sur celui-ci, et nul sur les autres éléments.

$$w_v^3(x) = \frac{1}{\text{vol}(v)} \quad \text{si } x \in v$$

$$w_v^3(x) = 0 \quad \text{si } x \notin v$$
(7.11)

où x est un point de \mathcal{D} et vol(v) est le volume de l'élément considéré.

L'espace engendré par les fonctions w_v^3 sera noté \mathcal{W}^3 . Une fonction U appartient à \mathcal{W}^3 si :

$$U = \sum_{v \in \mathcal{D}_h} w_v^3 u_v \tag{7.12}$$

Dans cette expression, u_v représente l'intégrale de volume de la fonction U sur l'élément v.

7.1.3 Espaces discrets

Comme dans le cas des domaines continus, on peut introduire, dans les espaces \mathcal{W}^i , des restrictions liées aux conditions aux limites.

Sur Γ_h on a :

$$\mathcal{W}_{h}^{0} = \left\{ u \in \mathcal{W}^{0}, u|_{\Gamma_{h}} = 0 \right\}$$
 (7.13)

$$\mathcal{W}_h^1 = \left\{ \mathbf{u} \in \mathcal{W}^1, \mathbf{u} \times \mathbf{n} |_{\Gamma_h} = 0 \right\} \tag{7.14}$$

$$\mathcal{W}_h^2 = \left\{ \mathbf{u} \in \mathcal{W}^2, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_h} = 0 \right\} \tag{7.15}$$

et, sur Γ_b :

$$\mathcal{W}_b^0 = \left\{ u \in \mathcal{W}^0, u|_{\Gamma_b} = 0 \right\} \tag{7.16}$$

$$\mathcal{W}_b^1 = \left\{ \mathbf{u} \in \mathcal{W}^1, \mathbf{u} \times \mathbf{n} |_{\Gamma_b} = 0 \right\}$$
 (7.17)

$$\mathcal{W}_b^2 = \left\{ \mathbf{u} \in \mathcal{W}^2, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} |_{\Gamma_b} = 0 \right\} \tag{7.18}$$

7.1.4 Potentiels

On retrouve ainsi une structure semblable à celle établie dans le domaine continu. On peut donc définir naturellement les espaces d'interpolations des champs et des potentiels introduits plus haut.

On a ainsi :

- les potentiels scalaires : $\Omega \in \mathcal{W}_h^0$; $\varphi \in \mathcal{W}_h^0$.
- les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} et les potentiels vecteurs : $\mathbf{H} \in \mathcal{W}_h^1$; $\mathbf{E} \in \mathcal{W}_h^1$; $\mathbf{A} \in \mathcal{W}_h^1$; $\mathbf{T} \in \mathcal{W}_h^1$
- la densité de courant \mathbf{J} et l'induction magnétique $\mathbf{B}: \mathbf{J} \in \mathcal{W}_h^2$; $\mathbf{B} \in \mathcal{W}_b^2$.

7.2 Opérateurs différentiels discrets

Comme dans le cas des espaces fonctionnels continus, les opérateurs discrets vont permettre d'établir un lien entre les nœuds, les arêtes, les facettes et les éléments des maillages (primal et dual).

En fait, il s'agit des matrices d'incidence introduites par A.Bossavit. Pour illustrer ces matrices, nous allons traiter le cas de l'hexaèdre présenté sur la figure 7.3. Il est à noter que les orientations sont choisies arbitrairement sur le primal, Par contre, l'orientation du maillage dual est déduite de l'orientation du maillage primal.

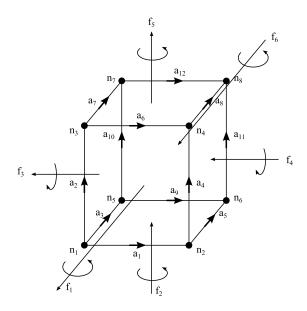


Figure 7.3 – Hexaèdre orienté

7.2.1 Le gradient discret G_{an} .

La forme discrète du gradient est la matrice d'incidence arête - nœud qui relie tous les nœuds primaux et toutes les arêtes primales du maillage. La taille correspond au nombre d'arêtes et de nœuds du maillage. De plus, l'incidence $i\left(a,n\right)$ d'un noeud sur une arête prend uniquement trois valeurs :

- 0 si le nœud n'appartient pas à l'arête;
- 1 si le nœud correspond au nœud d'arrivée de l'arête;
- -1 si le nœud correspond au nœud de départ de l'arête.

Dans le tableau 7.1, on donne la matrice d'incidence pour l'hexaèdre de la figure 7.3.

G_{an}	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8
a_1	-1	1						
a_2	-1		1					
a_3	-1				1			
a_4		-1		1				
a_5		-1				1		
a_6			-1	1				
a_7			-1					1
a_8				-1		1		
a_9					-1		1	
a_{10}					-1			
a_{11}						-1		1
a_{12}							-1	1

Tableau 7.1 – Matrice incidence G_{an} de l'hexaèdre de la figure 7.3

7.2.2 Le rotationnel discret R_{fa}

Il s'agit de la matrice d'incidence facette - arête qui assure la liaison entre les arêtes et les facettes du maillage. Tout comme pour G_{an} les termes de R_{fa} valent 0, 1 ou -1. A chaque facette

est associée une normale qui est soit entrante soit sortante et un sens de rotation (voir 7.3). De plus, l'incidence R_{fa} d'une facette sur une arête prend uniquement trois valeurs :

- 0 si l'arête n'appartient pas à la facette;
- 1 si l'arête est orientée dans le même sens que le sens de rotation associé à la facette;
- -1 si l'arête est orientée dans le sens opposée du sens de rotation associé à la facette.

R_{fa}	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
f_1	1	-1		1		-1						
f_2	1		-1		1				-1			
f_3		1	-1				1			-1		
f_4				1	-1			1			-1	
f_5						1	-1	1				-1
f_6									-1	-1	1	-1

Tableau 7.2 – Matrice incidence R_{fa} pour un hexaèdre

7.2.3 La divergence discrète D_{vf}

Cet opérateur associe tous les éléments à toutes les facettes du maillage. La divergence est définie par la matrice incidence volume – facette. Là encore, ces termes valent 0, 1 ou –1. De plus, l'incidence D_{vf} d'une facette sur un volume prend uniquement trois valeurs :

- 0 si la facette n'appartient pas au volume;
- 1 si la normale de la facette est orientée sortante du volume;
- -1 si la normale de la facette est orientée entrante dans le volume.

D_{vf}	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
V_1	-1	1	-1	1	-1	1

Tableau 7.3 – Matrice incidence D_{fv} pour un hexaèdre

7.2.4 Notion de maillage dual

Comme il a été mentionné dans le paragraphe précédent, il est nécessaire de discrétiser l'espace pour résoudre le problème numériquement. En 3D, un espace fonctionnel discrétisé \mathcal{V}_h (maillage) est constitué d'éléments (volume), de facettes, d'arêtes et de nœuds. Les ensembles des volumes, des facettes, des arêtes et des nœuds sont respectivement appelés \mathcal{V}_v , $\mathcal{V}_f, \mathcal{V}_a, \mathcal{V}_n$. La réunion de tous ces ensembles forment l'espace discret : $\mathcal{V}_h = \mathcal{V}_v \cup \mathcal{V}_f \cup \mathcal{V}_a \cup \mathcal{V}_n$. A ce maillage il est possible d'associer un maillage (grille) dual $\widetilde{\mathcal{V}}_h$ qui est aussi constitué de volumes, de facettes, d'arêtes et de nœuds qualifiés, eux aussi, de duaux. Par similitude, on peut établir : $\widetilde{\mathcal{V}}_h = \widetilde{\mathcal{V}}_v \cup \widetilde{\mathcal{V}}_f \cup \widetilde{\mathcal{V}}_a \cup \widetilde{\mathcal{V}}_n$. Le maillage dual est construit à partir du maillage initial, qualifié de 'primal', en associant :

- à chaque nœud primal n un volume dual \tilde{v}
- à chaque arête primale a une facette duale \tilde{f}
- à chaque facette primale f une arête duale \tilde{a}
- à chaque volume primal v un nœud dual \tilde{n}

Sur la figure 7.4 un maillage primal 2D et son dual sont représentés.

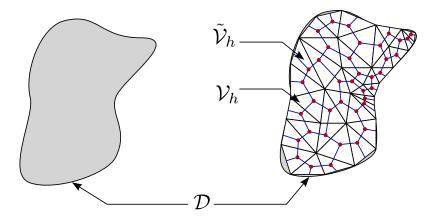


Figure 7.4 – Discrétisation d'un domaine continu

7.2.5 Propriétés des opérateurs

Comme nous l'avons vu pour le maillage primal, on peut définir de la même façon les opérateurs \tilde{G}_{an} , \tilde{R}_{fa} et \tilde{D}_{vf} du maillage dual. Si l'orientation des arêtes, des facettes et des éléments du maillage dual est déduite de l'orientation des arêtes, des facettes et des éléments du maillage primal, on montre alors que l'on a les propriétés suivantes entre les opérateurs discrets [Bossavit 2003] :

$$G_{an} = -\tilde{D}^t{}_{vf}$$

$$\tilde{G}_{an} = -D^t{}_{vf}$$

$$R_{fa} = \tilde{R}^t_{fa}$$

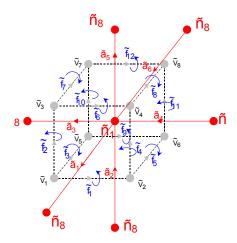


Figure 7.5 – Maillage dual de l'hexaèdre de la figure 2.3

A l'aide de ces propriétés, on note que, connaissant les opérateurs sur la grille primale, on peut facilement en déduire les opérateurs sur la grille duale et réciproquement.

7.3 Propriétés des espaces d'interpolation

Soit une fonction scalaire U appartenant à $\mathcal{W}^{0}\left(\mathcal{D}\right)$, on a alors :

$$U = \sum_{1}^{n=n0} w_n^0 u_n \tag{7.19}$$

Le gradient de la fonction U s'écrit :

$$\operatorname{\mathbf{grad}} U = \sum_{1}^{n=n_0} \operatorname{\mathbf{grad}} w_n^0 u_n \tag{7.20}$$

or, comme cela a été montré dans les références [Bossavit 1993] et [Dular 1994], on a :

$$\operatorname{\mathbf{grad}} w_n^0 = \sum_{a \in \varepsilon_h} G_{an} \, \mathbf{w}_a^1 \tag{7.21}$$

A partir des équations précédentes, on obtient :

$$\operatorname{\mathbf{grad}} U = \sum_{n \in \mathcal{N}_h} \left(\sum_{a \in \varepsilon_h} G_{an} \, \mathbf{w}_a^1 \right) u_n \tag{7.22}$$

ou encore:

$$\operatorname{grad} U = \sum_{a \in \varepsilon_h} \left(\sum_{n \in \mathcal{N}_h} G_{an} u_n \right) \mathbf{w}_a^1 \tag{7.23}$$

On constate donc que le gradient d'une fonction de \mathcal{W}_0 est inclus dans $\mathcal{W}_1.$ Soit :

$$Im\left(\operatorname{\mathbf{grad}}\mathcal{W}^0\right)\subset\mathcal{W}^1$$
 (7.24)

Donc on a:

$$Im\left(\operatorname{\mathbf{grad}}\mathcal{W}^{0}\right)\subset Ker\left(\operatorname{\mathbf{rot}}\mathcal{W}^{1}\right)$$
 (7.25)

Dans le cas d'un domaine simplement connexe, on retrouve l'égalité définie dans le domaine continu :

$$Im\left(\operatorname{\mathbf{grad}}\mathcal{W}^{0}\right) = Ker\left(\operatorname{\mathbf{rot}}\mathcal{W}^{1}\right) \tag{7.26}$$

On montre [Bossavit 1993][Dular 1994], en effectuant une démarche équivalente à la précédente que si U est une fonction appartenant à W^1 , on a la relation :

$$\mathbf{U} = \sum_{a \in \varepsilon_b} \mathbf{w}_a^1 \, u_a \tag{7.27}$$

Dans ces conditions, la fonction rot U s'écrit :

$$\mathbf{rot} \mathbf{U} = \sum_{f \in \mathcal{F}_h} \left(\sum_{a \in \varepsilon_h} R_{fa} \mathbf{u}_a \right) \mathbf{w}_f^2$$
 (7.28)

On a donc:

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{U}\in\mathcal{W}^2\tag{7.29}$$

De plus, si le domaine $\mathcal D$ est simplement connexe avec une surface Γ connexe, on a l'égalité suivante :

$$Im\left(\mathbf{rot}\,\mathcal{W}^{1}\right) = Ker\left(div\mathcal{W}^{2}\right) \tag{7.30}$$

Si U est une fonction de W^2 alors :

$$\mathbf{U} = \sum_{f \in \mathcal{F}_h} \mathbf{w}_f^2 \, u_f \tag{7.31}$$

Dans ces conditions, si on calcule $div \mathbf{U}$, on a :

$$div \mathbf{U} = \sum_{v \in \mathcal{D}_h} (D_{vf} u_f) \mathbf{w}_v^3$$
(7.32)

on a alors:

$$div \mathbf{U} \in \mathcal{W}^3 \tag{7.33}$$

ou encore:

$$Im\left(div\,\mathcal{W}^2\right) = \mathcal{W}^3\tag{7.34}$$

Les propriétés énoncées précédemment peuvent se mettre sous la forme d'une suite d'espaces discrets comme le montre la figure 7.6:

$$W^0 \xrightarrow{grad} W^1 \xrightarrow{rot} W^2 \xrightarrow{div} W^3$$

Figure 7.6 – Suite des espaces discrets W^i

7.4 Discrétisation des champs et potentiels

Les grandeurs physiques sont donc des combinaisons linéaires de fonctions spatiales. Ainsi, on peut écrire :

— pour le potentiel scalaire magnétique Ω qui est défini dans \mathcal{W}_h^0 :

$$\Omega(\mathbf{x},t) = \sum_{i} \Omega_{i}(t) \ w_{i}^{0}(\mathbf{x})$$
(7.35)

— pour le potentiel scalaire électrique φ qui s'exprime dans \mathcal{W}_b^0 :

$$\varphi\left(\mathbf{x},t\right) = \sum_{i} \varphi_{i}\left(t\right) \, w_{i}^{0}\left(\mathbf{x}\right) \tag{7.36}$$

— pour le potentiel vecteur magnétique **A** qui se trouve dans \mathcal{W}_h^1 :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \sum_{i} A_{i}(t) \mathbf{w}_{i}^{1}(\mathbf{x})$$
(7.37)

— pour le potentiel vecteur électrique **T** qui est dans \mathcal{W}_h^1 :

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \sum_{i} T_{i}(t) \mathbf{w}_{i}^{1}(\mathbf{x})$$
(7.38)

— pour la dérivée par rapport au temps de ${\bf A}$ qui se trouve dans ${\mathcal W}_b^1,$ uniquement pour la version spectrale :

$$\frac{\partial \mathbf{A}\left(\mathbf{x},t\right)}{\partial t} = \sum_{i} A_{i}^{\partial}\left(t\right) \mathbf{w}_{i}^{1}\left(\mathbf{x}\right) \tag{7.39}$$

— pour le champ magnétique **H** exprimé dans \mathcal{W}_h^1 :

$$\mathbf{H}(\mathbf{x},t) = \sum_{l} H_{l}(t) \mathbf{w}_{l}^{1}(\mathbf{x})$$
(7.40)

— le champ électrique **E** qui est défini dans \mathcal{W}_h^1 :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \sum_{l} E_{l}(t) \mathbf{w}_{l}^{1}(\mathbf{x})$$
(7.41)

— pour l'induction magnétique ${\bf B}$ qui est dans \mathcal{W}_b^2 :

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \sum_{l} B_{l}(t) \mathbf{w}_{l}^{2}(\mathbf{x})$$
(7.42)

— pour la densité de courant électrique ${\bf J}$ qui est dans \mathcal{W}_h^2 :

$$\mathbf{J}(\mathbf{x},t) = \sum_{l} J_{l}(t) \ \mathbf{w}_{l}^{2}(\mathbf{x}) \tag{7.43}$$

— pour l'induction magnétique \mathbf{B}_r qui est dans \mathcal{W}_b^2 :

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \sum_{l} B_{l}^{r}(t) \mathbf{w}_{l}^{2}(\mathbf{x})$$
(7.44)

— pour la densité de courant électrique \mathbf{J}^{Γ} qui est dans \mathcal{W}_h^2 :

$$\mathbf{J}(\mathbf{x},t) = \sum_{l} J_{l}^{\Gamma}(t) \ \mathbf{w}_{l}^{2}(\mathbf{x}) \tag{7.45}$$

— pour le champ magnétique \mathbf{H}^{Γ} exprimé dans \mathcal{W}_{h}^{1} :

$$\mathbf{H}(\mathbf{x},t) = \sum_{l} H_{l}^{\Gamma}(t) \ \mathbf{w}_{l}^{1}(\mathbf{x}) \tag{7.46}$$

Chapitre 8

Discrétisation des termes sources et des grandeurs globales

8.1 Introduction d'une jauge (arbres d'arêtes et de facettes)

8.1.1 Intérêt des arbres

Comme il a été vu plus haut, pour obtenir l'unicité d'un champ de vecteur, il est nécessaire d'imposer une condition de jauge. Dans le cas du rotationnel, comme le montre la relation 7.26, il faut fixer un gradient. Pour la divergence c'est une condition sur le rotationnel qu'il faut imposer. Par la suite, les conditions à imposer dans le domaine discret vont être détaillées.

Pour assurer l'unicité d'un vecteur ${\bf U}$ appartenant à ${\cal W}^1$ tel que :

$$\mathbf{rot} \mathbf{U} = \mathbf{V},$$

il suffit de fixer les circulations de ${\bf U}$ sur les arêtes d'un arbre. Un arbre étant composé d'un ensemble d'arêtes qui relient tous les noeuds du maillage sans former de boucles (on retrouve au niveau discret la jauge ${\bf U}$. ${\bf w}=f({\bf r})$ introduite dans le domaine continu).

En effet, prenons deux vecteurs \mathbf{U}_1 et \mathbf{U}_2 appartenant à \mathcal{W}^1 tels que $\mathbf{rot} \, \mathbf{U}_i = \mathbf{V}$ et tels que les circulations de \mathbf{U}_1 et \mathbf{U}_2 sur les arêtes de l'arbre soient fixées. On note :

$$\Delta\,\mathbf{U}=\mathbf{U}_1-\mathbf{U}_2$$

On a alors:

$$\mathbf{rot} \, \Delta \, \mathbf{U} = 0 \quad \text{avec } \Delta \, \mathbf{U} \in \mathcal{W}^1 \tag{8.1}$$

Le domaine étant simplement connexe, il existe un scalaire λ avec :

$$\lambda \in \mathcal{W}^0$$

tel que:

$$\Delta \mathbf{U} = \mathbf{grad} \,\lambda \tag{8.2}$$

De plus la circulation de Δ **U** sur les arêtes de l'arbre est égale à zéro. Si n_1 et n_2 sont deux noeuds du maillage, on a :

$$\lambda_{n_1} - \lambda_{n_2} = \int_{\mathbf{x}_{n_1}}^{\mathbf{x}_{n_2}} \mathbf{grad} \, \lambda \cdot \mathbf{dl} = \int_{\mathbf{x}_{n_1}}^{\mathbf{x}_{n_2}} \Delta \mathbf{U} \cdot \mathbf{dl}$$
 (8.3)

72CHAPITRE 8. DISCRÉTISATION DES TERMES SOURCES ET DES GRANDEURS GLOBALES

où λ_{n_1} et λ_{n_2} sont les valeurs nodales de λ en n_1 et n_2 et, x_{n_1} et x_{n_2} les coordonnées de ces noeuds. Pour joindre n_2 à partir de n_1 , on peut donc prendre n'importe quel chemin le long des arêtes du maillage. Dans ce cas, on peut le choisir sur un arbre d'arêtes où la circulation de Δ U est nulle. Dans ces conditions :

$$\lambda_{n_1} - \lambda_{n_2} = 0 \tag{8.4}$$

ce qui impose:

 $\operatorname{\mathbf{grad}} \lambda = 0$

On a donc bien:

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2$$

Considérons maintenant \mathbf{U}_1 et \mathbf{U}_2 appartenant à \mathcal{W}^2 tels que :

$$\operatorname{div} \mathbf{U}_i = V$$

avec : $V \in \mathcal{W}^3$, on a alors :

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2 + \mathbf{rot}\Lambda \tag{8.5}$$

 $avec:\Lambda\in\mathcal{W}^1$

On pose:

$$\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2 = \Delta \, \mathbf{U}$$

et:

$$\operatorname{div} (\Delta \mathbf{U}) = 0$$

Par analogie avec le cas précédent, il faut construire un arbre de facettes sur lequel on fixe les valeurs du flux de Δ **U**.

Les techniques de construction des arbres d'arêtes sont largement exposées dans la littérature [Albanese, Rubinacci 2000], [Golias, Tsiboukis 1994], [Gondran, Minoux 1995]. C'est pourquoi, dans la suite, nous détaillerons uniquement la méthode que nous avons développée pour construire un arbre de facettes.

Cependant, à titre d'exemple, nous avons représenté sur la figure 8.2 un arbre d'arêtes relatif au maillage de la figure 8.1.

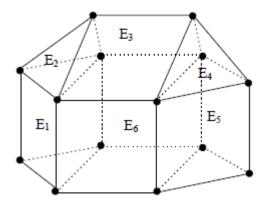


Figure 8.1 – Exemple de maillage

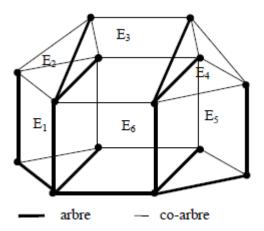


Figure 8.2 – Exemple d'arbre d'arêtes

8.1.2 Construction d'un arbre de facettes

Pour élaborer un arbre de facettes, nous allons nous appuyer sur l'algorithme de construction de l'arbre d'arêtes [Albanese, Rubinacci 2000]. Cet algorithme est basé sur les propriétés des graphes. Dans la construction d'un arbre d'arêtes, comme une arête relie deux noeuds, on peut obtenir un graphe arête-noeud d'un maillage. Or, il existe une relation semblable entre les facettes et les éléments puisqu'une facette relie deux éléments [Le Menach et al 1998].

Tout d'abord on définit un nouvel élément E_{Γ} qui symbolise l'extérieur du domaine. On notera que toutes les facettes appartenant à la frontière extérieure Γ font partie de E_{Γ} . A titre d'exemple, on trouvera figure 8.3 la transposition de deux éléments et une facette en une arête et deux noeuds.

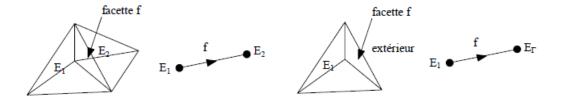


Figure 8.3 – Liaison facette-élément

Sur cette dernière figure, deux cas sont considérés : une liaison entre deux éléments (figure 8.3 à gauche) et une liaison entre un élément et la frontière extérieure (figure 8.3 à droite).

Prenons à nouveau le maillage de la figure 8.1 en numérotant les facettes comme le montre la figure 8.4 :

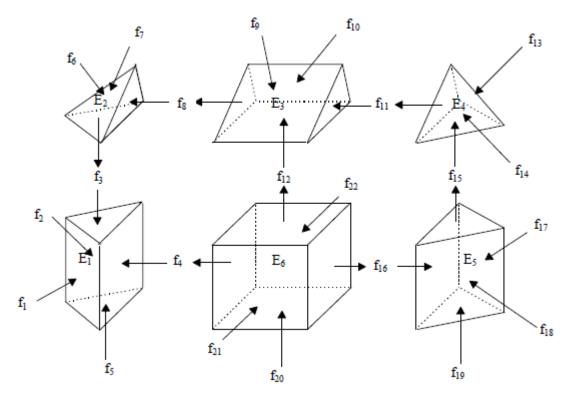


Figure 8.4 – Définition des facettes du maillage

Nous pouvons maintenant réaliser le graphe facette-élément de ce maillage (voir figure 8.5).

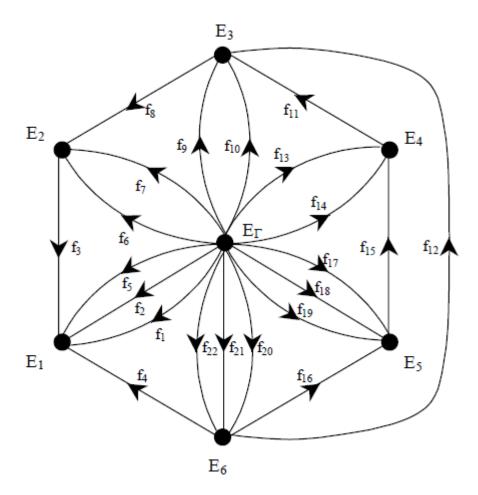


Figure 8.5 – Graphe de liaison facettes - éléments

L'élément frontière E_{Γ} est placé au centre du graphe vers lequel toutes les arêtes représentant les facettes appartenant à Γ , convergent. L'orientation des facettes correspond à la direction des normales des facettes définies sur la figure 8.4.

Considérons un vecteur ${\bf U}$ appartenant à ${\cal W}^2$ tel que :

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = V \quad \operatorname{avec} V \in \mathcal{W}^3.$$

Le vecteur ${\bf U}$ et la fonction ${\bf V}$ peuvent s'exprimer par les relations :

$$\mathbf{U} = \sum_{f \in \mathcal{F}} u_f \, \mathbf{w}_f \tag{8.6}$$

$$V = \sum_{v \in \mathcal{V}} v_v \, w_v \tag{8.7}$$

où v_v représente l'intégrale de la fonction V sur l'élément considéré. Du fait de la relation qui lie U et V, on a, sur chaque élément 'e', la propriété suivante :

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} i(v, f) \ u_f = v_v \tag{8.8}$$

Dans ces conditions, construire un arbre de facettes revient à rechercher les facettes dont on peut fixer arbitrairement les valeurs de flux tout en satisfaisant la relation 8.8 pour tous les éléments. On montre alors que les facettes, sur lesquelles on déduit les valeurs de flux, appartiennent à un 'co-arbre'. Par exemple, si on considère un tétraèdre, on peut fixer le flux sur trois de ces facettes. Comme nous l'avons indiqué le flux est imposé sur la quatrième facette afin de vérifier l'équation 8.8. A partir de la représentation arête-noeud, on peut construire un arbre $\mathcal A$ reliant tous les noeuds représentant les éléments, sans former de boucle fermée. On montre alors que les facettes, qui correspondent aux arêtes n'appartenant pas à $\mathcal A$, forment un arbre de facettes.

A titre indicatif, on trouvera sur la figure 8.6, un co-arbre de facettes correspondant au maillage de la figure 8.4 et sur la figure 8.7 un arbre de facettes.

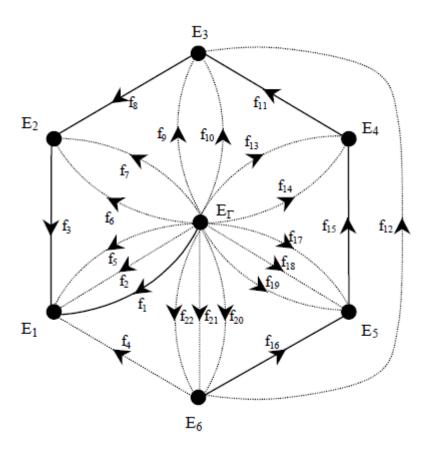


Figure 8.6 – co-arbre de facettes (traits pleins)

8.2 Discrétisation de K et N

Nous avons développé dans le chapitre 3, en introduisant deux champs de vecteurs \mathbf{N} et \mathbf{K} , le couplage des formulations en potentiel avec les équations électriques des circuits. Nous devons déterminer à quels espaces discrets appartiennent ces deux vecteurs. Pour ce faire nous rappelons ci-dessous leurs définitions :

$$\mathbf{J}_s = I_s \, \mathbf{N} \tag{3.6}$$

$$\mathbf{H}_s = I_s \, \mathbf{K} \tag{3.7}$$

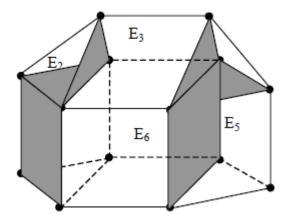


Figure 8.7 – Représentation d'un arbre de facettes (facettes non grisées)

Dans le domaine discret, on introduit donc deux vecteurs \mathbf{N}^d et \mathbf{K}^d :

$$\mathbf{J}_s^d = I_s \, \mathbf{N}^d \tag{8.9}$$

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{K}^d = \mathbf{N}^d \tag{8.10}$$

d'où les appartenances suivantes :

$$\mathbf{N}^d \in \mathcal{W}^2$$

 $\mathbf{K}^d \in \mathcal{W}^1$

8.2.1 Discrétisation de N

Pour obtenir une divergence de ${\bf N}$ égale à zéro, plusieurs méthodes peuvent être envisagées. Certaines expriment le vecteur ${\bf N}$ à partir d'un potentiel vecteur source [Ren 1996b], [Golovanov 1997] ce qui permet d'assurer naturellement la conservation du vecteur ${\bf N}$. Ce potentiel est obtenu soit analytiquement pour les inducteurs de forme simple, soit par la minimisation d'une fonctionnelle qui nécessite un calcul par éléments finis. Le rotationnel du potentiel est alors introduit dans les formulations en tant que terme source.

D'autres méthodes consistent à rechercher un vecteur \mathbf{N} à divergence nulle sans utiliser l'artifice d'un potentiel vecteur. A l'aide d'une conductivité tensorielle et d'un calcul en électrocinétique, on peut obtenir une densité de courant, soit \mathbf{N} à I_s près, uniforme à divergence nulle [Dular et al 1996].

Une autre technique consiste à introduire deux potentiels scalaires définis sur les surfaces d'inducteurs. Le produit vectoriel des gradients des potentiels indique la direction de la densité de courant [Kameari, Koganezawa 1997].

Aussi, nous proposons une autre méthode ne nécessitant pas de calcul par éléments finis qui s'applique aux inducteurs filaires ayant une section constante.

Pour discrétiser la densité de courant \mathbf{J}_s , et, donc le vecteur \mathbf{N} , il faut respecter quatre conditions :

- la densité de courant discrétisée doit être la plus proche possible de la densité de courant réelle;
- elle doit être décomposée dans l'espace des éléments de facettes;

78CHAPITRE 8. DISCRÉTISATION DES TERMES SOURCES ET DES GRANDEURS GLOBALES

- les conditions aux limites sont : $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur l'enveloppe externe de l'inducteur et $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = J$ sur Γ_b ;
- sa divergence doit être nulle sur tous les éléments du maillage.

Considérons l'inducteur de la figure 8.8 maillé avec des tétraèdres.

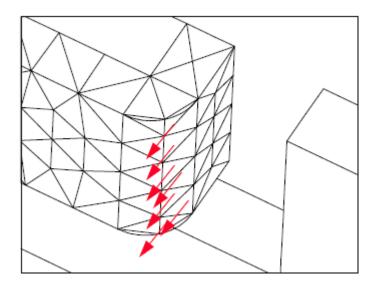


Figure 8.8 – Erreur de discrétisation spatiale entraînant une densité de courant sortante.)

Comme on peut le voir le maillage n'épouse pas exactement la forme de l'inducteur dans les angles. Ainsi si on projette directement \mathbf{J}_s dans \mathcal{W}^2 , $j_f^{d'}$ le flux à travers une facette 'f' de l'inducteur s'écrit :

$$j_f^{d'} = \int_{S_f} \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n} \, dS \tag{8.11}$$

où S_f est la surface de la facette et \mathbf{n} sa normale. Les flux des facettes n'appartenant pas à l'inducteur sont nuls. La densité de courant $\mathbf{J}_s^{d'}$ ainsi décomposée a pour expression :

$$\mathbf{J}_s^{d'} = \sum_{f \in \mathcal{F}} j_f^{d'} \mathbf{w}_f \tag{8.12}$$

Dans ces conditions, considérons un élément 'v' extérieur à l'inducteur dont une de ces facettes est en contact avec l'angle de la bobine. Du fait de la discrétisation, le flux $j_f^{d'}$ n'est pas nul à travers cette facette. Par contre, il est nul sur les autres facettes de l'élément 'v' car elles n'appartiennent pas à l'inducteur. Par conséquent, non seulement la divergence de $\mathbf{J}_s^{d'}$ n'est pas nulle mais en plus, une densité de courant apparaît dans cet élément.

Pour construire un champ \mathbf{J}_s^d à divergence nulle dans \mathcal{W}^2 et proche de \mathbf{J}_s , nous proposons une méthode basée sur l'utilisation d'un arbre de facettes. On désigne par F_{ext} l'ensemble des facettes qui appartiennent à la surface externe de l'inducteur et F_b l'ensemble des facettes du conducteur en contact avec Γ_b . L'arbre est construit en incluant toutes les facettes de F_{ext} et de F_b sauf une (sinon on réalise une surface fermée). Sur les facettes de F_{ext} , on impose un flux nul ($\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$). Sur les facettes de F_b et sur les autres facettes de l'arbre, on impose :

$$j_f^{d'} = \int_{S_f} \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n} \, dS \tag{8.13}$$

Comme on impose fortement le flux $j_f^{d'}$ égal à zéro sur les facettes externes de l'inducteur, on aura donc aucun courant sortant à travers les facettes F_{ext} . A l'intérieur de l'inducteur, on calcule le flux sur les facettes du co-arbre en imposant la divergence nulle sur chaque élément soit :

$$\sum_{f \in V} j_f^{d'} = 0 \tag{8.14}$$

Le vecteur densité de courant dans W^2 ainsi obtenu est proche de \mathbf{J}_s tout en ayant une divergence nulle. On peut donc à partir de ce vecteur calculer un champ source \mathbf{H}_s appartenant à W^1 tel que :

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{H}_s=\mathbf{J}_s$$

8.2.2 Discrétisation de K

Plusieurs méthodes permettent de déterminer le champ source \mathbf{H}_s . Pour des inducteurs de forme simple, il peut être calculé analytiquement [Kladas, Tegopoulos 1992], [Bouissou 1994], [Nakata et al 1988].

Le champ \mathbf{H}_s peut être déterminé en minimisant l'écart entre $\mathbf{rot} \, \mathbf{H}_s$ et la densité de courant \mathbf{J}_s circulant dans l'inducteur [Golovanov 1997]. Ce calcul peut être mené sur un sous-domaine de \mathcal{D} contenant l'inducteur. Il est alors possible de choisir \mathbf{H}_s dans \mathcal{W}^1 . Enfin, si on dispose d'une densité de courant \mathbf{J}_s^d appartenant à l'espace des éléments de facettes, il est possible de déterminer, par une méthode itérative, le champ source [Webb, Forghani 1989] [Biro et al 1993b] [Le Menach et al 1998]. En effet, \mathbf{H}_s doit vérifier deux conditions :

$$\left\{egin{array}{lll} \mathbf{rot}\,\mathbf{H}_s &=& \mathbf{J}_s^d \ & & & \in & \mathcal{W}^1 \end{array}
ight.$$

Il existe une infinité de champs vérifiant ces conditions. Pour assurer l'unicité on utilise un arbre d'arêtes (cf. conditions de jauge). Sur les arêtes de cet arbre on impose les circulations de \mathbf{H}_s à des valeurs arbitraires (nulles par exemple). Les circulations de \mathbf{H}_s sur les arêtes du coarbre sont calculées de manière itérative en vérifiant le théorème d'Ampère sur chaque facette du maillage. La figure 8.9 illustre l'application de ce théorème pour une facette triangulaire.

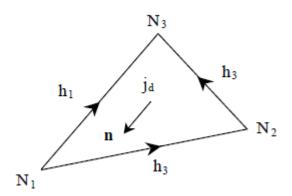


Figure 8.9 – Facette traversée par un courant j_d et définition des circulations de \mathbf{H}_s .

Dans le cas de la magnétostatique ou de la magnétodynamique, il est intéressant d'imposer un champ \mathbf{H}_s ayant une composante tangentielle nulle sur Γ_h . Afin d'assurer cette condition, la construction de l'arbre commence d'abord sur cette surface puis, se propage ensuite à tout le domaine.

8.3 Discrétisation de α et β

La fonction β est discrétisée sur les arêtes du maillage et la fonction α aux noeuds. En pratique β n'est pas déterminé. Seul α et son gradient sont évalués.

On définit une fonction α telle que [Dular, Legos 1998] :

$$\alpha = \sum_{n \in N_{\Gamma_n^{\perp}}} w_n \tag{8.15}$$

avec $N_{\Gamma_c^1}$ l'ensemble des noeuds de Γ_c^1 et w_n la fonction nodale associée au noeud n. On constate que la fonction α appartient à \mathcal{W}^0 . Celle-ci est égale à 1 sur Γ_c^1 et zéro en dehors d'un domaine \mathcal{D}_{α} défini par l'ensemble des éléments contenant au moins un noeud de Γ_c^1 . Dans \mathcal{D}_{α} , la fonction α varie de manière continue de 1 sur la frontière Γ_c^1 à 0 sur la frontière de \mathcal{D}_{α} . Dés lors, on peut définir α_n le vecteur des valeurs aux noeuds de α de composantes α_n avec $1 \leq n \leq n_n$. Les composantes de α_n sont définies par :

$$\alpha_n = 1 \quad \text{si } n \in N_{\Gamma_n^1} \tag{8.16}$$

$$\alpha_n = 0$$
 ailleurs (8.17)

8.4 Discrétisation de la densité de courant d'un inducteur bobiné

8.4.1 Introduction

Dans le cadre de la modélisation en électromagnétisme, la complexité des domaines comme des équations nécessite d'approcher la solution par des méthodes de discrétisation. Ces méthodes requièrent une discrétisation du domaine ainsi que des différents champs, notamment du terme source, qui peut être la densité de courant J. Dans ce cas précis, la densité de courant discrétisée doit cependant respecter un certain nombre de caractéristiques très contraignantes : une divergence nulle pour assurer la compatibilité du terme source [Ren et al 1996], pas de sortie du courant sur les bords du domaine, des conditions aux limites pour l'entrée ou la sortie du courant... tout en restant aussi proche que possible de la densité de courant exacte.

Un moyen efficace d'obtenir une divergence égale à zéro est d'utiliser la théorie des graphes, en ayant recours à un arbre de facettes [Bossavit 1993], [Dlotko et al 2011], [Le Menach et al 1998]. Une formulation du type $\mathbf{J} = \mathbf{rotT}$, [Golovanov et al 1999], peut être utilisée pour minimiser l'erreur entre les densités de courant exacte et discrète. Il est également envisageable de résoudre un système matriciel garantissant les conditions de divergence et de minimisation de l'erreur [Badics et al 2007].

Dans cet exposé, cette idée est reprise, mais en ayant toujours recours à la technique de l'arbre de facettes pour résoudre le système matriciel. Nous appliquerons cette méthode pour un volume dont le maillage des bords introduit une forte variation de la section et un faible respect des dimensions géométriques.

8.4.2 Discrétisation à l'aide du complexe de Whitney

Nous décomposons un domaine $\mathcal D$ simplement connexe, de bord $\partial \mathcal D$, en $\mathsf E$ éléments et nous notons par :

- F l'ensemble des F facettes.
- E l'ensemble des E éléments.
- N_f le nombre de facettes par élément.
- $\partial \mathcal{D}_{es}$ les bords d'entrée et sortie du courant.

Nous cherchons à discrétiser une densité de courant uniforme J. Le vecteur densité de courant discrétisée appartient à l'espace des éléments de facette [Bossavit 1993], et s'écrit donc comme la combinaison linéaire suivante :

$$\boldsymbol{J}_d = \sum_{f \in \mathbf{F}} \Phi_f \ \boldsymbol{\mathcal{F}}_f \tag{8.18}$$

où \mathcal{F}_f représente la fonction de facette associée à la facette f, et Φ_f représente le flux du vecteur densité de courant J à travers la facette f, c'est-à-dire $\int_f J.n_f ds$, n_f représentant la normale unitaire à la facette f.

Pour discrétiser le terme source J de la densité de courant, il faut veiller à respecter les conditions suivantes :

- $-\operatorname{div}\boldsymbol{J}_d=0,$
- la densité de courant discrétisée J_d doit être la plus proche possible de la densité de courant réelle J,
- $\boldsymbol{J}_d.\boldsymbol{n} = 0 \text{ sur } \partial \mathcal{D} \setminus \partial \mathcal{D}_{es}.$

8.4.2.1 Matrice d'incidence

Considérons la contrainte div ${\pmb J}_d=0$ pour tout $e\in {\pmb E},$ et intégrons pour utiliser le théorème de Green-Ostrogradski :

$$\int_{e} \operatorname{div} \boldsymbol{J}_{d} \ dv = \int_{\partial e} \boldsymbol{J}_{d} \cdot \boldsymbol{n} \ dS = \sum_{f \in e} \Phi_{f} = 0$$
(8.19)

Nous traduisons cette égalité sous la forme d'un système matriciel :

$$D\Phi = 0, (8.20)$$

où $\Phi_i = \Phi_{f_i}$, flux de J à travers f_i , i-ème facette de F.

La matrice D est de dimension $\mathsf{E} \times \mathsf{F}$, avec $\mathsf{F} > \mathsf{E}$. Une ligne correspond à un élément du maillage, une colonne à une facette. Cette matrice correspond à l'opérateur de divergence discret, mais aussi à la matrice d'incidence facette-élément [Bossavit 1993]. Pour les raisons développées dans [Ren et al 1996], il est nécessaire que cette condition soit fortement vérifiée.

8.4.2.2 Matrice de masse

Pour garantir un vecteur J_d aussi proche que possible de la densité de courant exacte, nous allons tâcher de minimiser la norme de la différence entre J_d et J [Badics et al 2007] :

$$\varepsilon = \int_{\mathcal{D}} (\boldsymbol{J}_d - \boldsymbol{J})^2 dv \tag{8.21}$$

En développant J_d par son expression (8.18) et en dérivant ε par rapport à la variable Φ_{f_i} , le problème de minimisation devient :

$$\sum_{f \in \mathbf{F}} \Phi_f \int_{\mathcal{D}} \mathcal{F}_f . \mathcal{F}_{f_i} \ dv = \int_{\mathcal{D}} \mathcal{F}_{f_i} . \mathbf{J} \ dv$$
 (8.22)

En considérant cette équation pour tout $f_i \in \mathbf{F}$, nous obtenons le système matriciel suivant, de taille $\mathsf{F} \times \mathsf{F}$:

$$M\Phi = v \tag{8.23}$$

où

$$M_{i,j} = \int_{D} \mathcal{F}_{f_i} . \mathcal{F}_{f_j} dv, \quad v_i = \int_{D} \mathcal{F}_{f_i} . J dv.$$

La matrice M est classiquement appelée la matrice de masse des fonctions de facettes.

Les équations (8.20) et (8.23) forment ainsi un système global de taille $(E + F) \times F$:

$$\begin{bmatrix} D \\ M \end{bmatrix} \Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \tag{8.24}$$

8.4.3 Utilisation de l'arbre de facettes

L'arbre utilisé ici est un arbre d'arêtes et de facettes [Bossavit 1993], [Dlotko et al 2011], [Le Menach et al 1998] : un sommet de l'arbre représente une facette du maillage, un arc, une arête. On inclut dans cet arbre l'ensemble des facettes du bord, sauf une, ainsi qu'une partie des facettes internes. Toutes les facettes restantes forment ce qu'on appelle le co-arbre, qui est un arbre facette-élément.

L'utilisation de l'arbre de facettes permet de scinder l'ensemble des facettes en deux groupes : les facettes de l'arbre, et celles du co-arbre. C'est-à-dire que la matrice D se trouve séparée en deux matrices A et C, respectivement la matrice de l'arbre et celle du co-arbre, telles que :

$$D\Phi = [C, A] \begin{bmatrix} \Phi_C \\ \Phi_A \end{bmatrix} = 0 \tag{8.25}$$

avec

- -C, $E \times E$, inversible, où les colonnes représentent les facettes du co-arbre,
- $-A, E \times (F E)$, où les colonnes représentent les facettes de l'arbre.

Ce qui amène la possibilité d'exprimer les flux à travers les facettes du co-arbre en fonction des flux des facettes de l'arbre :

$$\Phi_C = -C^{-1}A\Phi_A \tag{8.26}$$

De la même manière, nous pouvons séparer le système (8.23) en fonction de Φ_C et Φ_A :

$$[M_C, M_A] \begin{bmatrix} \Phi_C \\ \Phi_A \end{bmatrix} = v \iff M_C \Phi_C + M_A \Phi_A = v \tag{8.27}$$

Or $\Phi_C = -C^{-1}A\Phi_A$, donc le système (8.27) s'écrira finalement :

$$(-M_C C^{-1} A + M_A) \Phi_A = v \tag{8.28}$$

Ce système est de taille $F \times (F - E)$, il est surdéterminé. Par une méthode des moindres carrés, nous obtenons le vecteur Φ_A puis déduisons Φ_C par l'équation (8.26). Notons bien que la condition div $J_d = 0$ est assurée.

Inversion de la matrice du co-arbre

La matrice C est constituée de 0, de 1 et de -1, et elle possède un ensemble de lignes avec un seul terme non nul, un autre ensemble avec deux termes non nuls, ..., et enfin un ensemble de lignes avec $N_{\rm f}$ termes non nuls. Cette caractéristique de la matrice permet de mettre en place un algorithme efficace pour l'obtention de C^{-1} .

8.4.4 Application à un coude de section circulaire

Nous discrétisons la densité de courant unitaire dans un coude de section circulaire en utilisant code_Carmel développé par EDF R&D et le L2EP. Le maillage du domaine est visible sur la figure 8.10. Nous nous concentrons sur la partie coudée pour la visualisation du champ, puisque l'erreur v est localisée.

Le champ sur la figure 8.11.(a) représente la densité de courant obtenue en utilisant uniquement la relation (8.26): les flux sont fixés sur les facettes de l'arbre avec leurs valeurs exactes, puis les flux sur les facettes du co-arbre sont déduits par l'équation (8.26). Ainsi, la divergence est nulle.

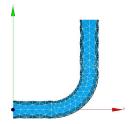


Figure 8.10 – Maillage d'un coude de section circulaire.

La figure 8.11.(b) montre la densité de courant obtenue par la méthode de minimisation de l'erreur : la divergence nulle est assurée, et l'erreur par rapport à la densité de courant exacte se trouve minimisée.

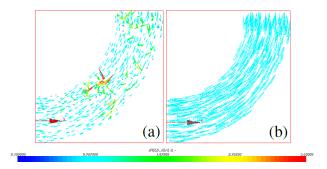


Figure 8.11 – (a) \boldsymbol{J}_d avant minimisation. (b) \boldsymbol{J}_d après minimisation.

8.4.5 Conclusion

Par la technique présentée, nous avons forcé une divergence égale à zéro tout en minimisant l'erreur entre les champs des densités de courant exacte et approchée, par le biais de la méthode de l'arbre de facettes.

84CHAPITRE 8. DISCRÉTISATION DES TERMES SOURCES ET DES GRANDEURS GLOBALES

Chapitre 9

Discrétisation des formulations faibles dans code_Carmel

Résumé

Nous projetterons les différentes grandeurs dans les espaces fonctionnels discrets à l'aide de fonctions d'interpolations simples. Pour code_Carmel temporel, la dérivation temporelle que l'on rencontre dans les équations de la magnétodynamique et dans le couplage circuit sera discrétisée avec la méthode d'Euler implicite. Pour code Carmel spectral, une approche spécifique est utilisée.

9.1 Espaces fonctionnels discrets

Concrètement, la discrétisation des espaces de Hilbert continus par la méthode des éléments finis s'appuie sur un maillage du domaine \mathcal{D}_h . Il s'agit ici de découper le domaine d'étude en polyèdres simples respectant les différentes frontières entre les milieux. On désigne alors par un maillage l'ensemble des volumes, faces, arêtes et noeuds. Sur un maillage donné, il existe une infinité de sous-espaces discrets permettant d'approcher les espaces de Hilbert continus définis précédemment. Dans le cadre de cet exposé, on choisit de représenter les espaces discrétisés par les éléments de Whitney d'ordre minimal. En plus d'être simples, ces derniers ont l'avantage d'associer à chaque classe d'espace $(H^1(\mathcal{D}), \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \mathcal{D}), \mathbf{H}(div, \mathcal{D}))$ et $L^2(\mathcal{D})$ un type d'élément (noeud, arête, facette et volume).

Bien que seule l'approximation de $\mathbf{H}(\mathbf{rot},\mathcal{D})$ et $H^1(\mathcal{D})$ soit nécessaire pour la discrétisation des formulations faibles, on présente par souci d'exhaustivité, l'approximation des quatre espaces de Hilbert $H^1(\mathcal{D})$, $\mathbf{H}(\mathbf{rot},\mathcal{D})$, $\mathbf{H}(div,\mathcal{D})$ et $L^2(\mathcal{D})$ par les espaces de Whitney respectifs $W^0(\mathcal{D}_h)$, $W^1(\mathcal{D}_h)$, $W^2(\mathcal{D}_h)$ et $W^3(\mathcal{D}_h)$, où \mathcal{D} est un domaine topologiquement trivial simplement connexe et sans cavité) et \mathcal{D}_h un maillage reposant sur ce domaine.

9.1.1 Approximation de $H^1(\mathcal{D})$

Soit n_0 le nombre de noeud du maillage \mathcal{D}_h . L'espace de Whitney d'ordre minimal permettant d'approcher $H^1(\mathcal{D})$ sur \mathcal{D}_h est :

$$W^{0}\left(\mathcal{D}_{h}\right) = Vect\left(w_{1}^{0}\left(\mathbf{x}\right), w_{2}^{0}\left(\mathbf{x}\right), ..., w_{n_{0}}^{0}\left(\mathbf{x}\right)\right) \subset H^{1}\left(\mathcal{D}\right)$$

$$(9.1)$$

où les fonctions de base $\left(w_i^0\left(\mathbf{x}\right)\right)_{i=1,\dots,n_0}$ à valeurs dans $\mathbb R$ vérifient les quatre propriétés suivantes :

1. en notant x_i les coordonnées du j-ème noeud, on a :

$$w_i^0(\mathbf{x}_i) = \delta_i^j, \ \forall (i,j) \in \{1,...,n_0\}^2$$
 (9.2)

avec δ_i^j le symbole de Kronecker valant 1 si i = j et 0 sinon. Ainsi, $w_i^0(\mathbf{x})$ est associée au noeud i, c'est pourquoi on parle de **fonctions nodales**.

- 2. $w_i^0(\mathbf{x}), i = (1, ..., n_0)$ est **continue** sur \mathcal{D} , et appartient également à $H^1(\mathcal{D})$.
- 3. l'ensemble des fonctions $(w_i^0(\mathbf{x}))_{i=1,\dots,n_0}$ est une **partition de l'unité** sur \mathcal{D} :

$$\sum_{i=1}^{n_0} w_i^0(\mathbf{x}) = 1 \tag{9.3}$$

4. la i-ème fonction nodale w_i^0 est identiquement nulle sur l'élément K_j si celui-ci ne contient pas le noeud i.

Ainsi, tout *champ scalaire* $s(\mathbf{x})$ appartenant à $H^1(\mathcal{D})$ sera approximé dans $\mathbf{W}^0(\mathcal{D}_h)$ par :

$$s_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_0} s_i \, w_i^0(\mathbf{x}) \tag{9.4}$$

En évaluant cette expression aux noeuds du maillage \mathbf{x}_j et en utilisant la première propriété, on trouve que s_i correspond à la valeur du point au noeud i. Enfin, il est à noter que la quantité $s_h(\mathbf{x})$ est préservée lors du passage d'un élément à un autre.

Remarque 9.1.1 Sur un maillage triangulaire en 2D ou tétraédrique en 3D, les fonctions $w_i^0(x, y, z)$ sont des polynômes de Lagrange de degré au plus 1 sur chaque élément. Sur des éléments plus complexes, il s'agit de généralisation de ce type de polynômes.

9.1.2 Approximation discrète de $H(rot, \mathcal{D})$

Soit n_1 le nombre d'arêtes du maillage \mathcal{D}_h . On définit l'espace de Whitney permettant d'approcher $H(\mathbf{rot}, \mathcal{D})$ sur \mathcal{D}_h par :

$$\mathbf{W}^{1}\left(\mathcal{D}_{h}\right) = Vec\left(\mathbf{w}_{1}^{1}\left(\mathbf{x}\right), \mathbf{w}_{2}^{1}\left(\mathbf{x}\right), ..., \mathbf{w}_{n_{1}}^{1}\left(\mathbf{x}\right)\right) \subset H\left(\mathbf{rot}, \mathcal{D}\right)$$
(9.5)

où $\mathbf{w}_i^1(\mathbf{x})$ est un fonction vectorielle à valeurs dans \mathbb{R}^3 , associée à l'arête d'indice i. En effet, à l'instar de la propriété 1 pour les fonctions nodales, elles vérifient :

$$\int_{a_{j}} \mathbf{w}_{i}^{1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{d}l = \delta_{i}^{j}, \ \forall (i, j) \in \{1, ..., n_{1}\}^{2}$$
(9.6)

où l'intégrale précédente désigne la circulation de $\mathbf{w}_i^1(\mathbf{x})$ associée à l'arête a_j . Grâce aux propriétés des espaces de Whitney, leur expression est définie directement à partir de celle des fonctions nodales. Ainsi, la fonction associée à l'arête i, orientée du noeud u vers le noeud v est :

$$\mathbf{w}_{i}^{1} = w_{v}^{0} \operatorname{\mathbf{grad}} \left(\sum_{t \in \mathcal{N}(v, \overline{u})} w_{t} \right) - w_{u}^{0} \left(\sum_{t \in \mathcal{N}(u, \overline{v})} w_{t} \right)$$

$$(9.7)$$

où $\mathcal{N}\left(u,\overline{v}\right)$ désigne les noeuds sur les facettes contenant le noeud u mais pas le noeud v.

Remarque 9.1.2 Par exemple pour le cas de l'élément cubique représenté dans la figure 9.1, $\mathcal{N}(1,\overline{2})$ contient les noeuds ($\{1,4,5,8\}$. En effet, seule la facette '1485' contient le noeud 1 et ne contient pas le noeud 2.

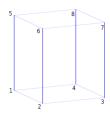


Figure 9.1 – Élément cubique

Ainsi, tout champ vectoriel $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ appartenant à $H(\mathbf{rot}, \mathcal{D})$ sera approximé dans $\mathbf{W}^1(\mathcal{D}_h)$ par :

$$\mathbf{V}_{h}\left(\mathbf{x}\right) = \sum_{i=1}^{n_{1}} V_{i} \,\mathbf{w}_{i}^{1}\left(\mathbf{x}\right) \tag{9.8}$$

où, de même qu'avec les fonctions nodales, V_i correspond à la circulation de \mathbf{V} sur l'arête i. Enfin, une propriété intéressante de cette approximation est qu'elle préserve la **continuité de la trace tangentielle au passage d'un élément à un autre**.

9.1.3 Approximation discrète de $H(div, \mathcal{D})$

Soit n_2 le nombre de facettes du maillage \mathcal{D}_h . On définit l'espace de Whitney permettant d'approcher $H(div, \mathcal{D})$ sur \mathcal{D}_h par :

$$\mathbf{W}^{2}(\mathcal{D}_{h}) = Vec\left(\mathbf{w}_{1}^{2}(\mathbf{x}), \mathbf{w}_{2}^{2}(\mathbf{x}), ..., \mathbf{w}_{n_{2}}^{2}(\mathbf{x})\right) \subset H\left(div, \mathcal{D}\right)$$

$$(9.9)$$

où $\mathbf{w}_i^2(\mathbf{x})$ est une fonction vectorielle à valeurs dans \mathbb{R}^3 , associée à la i-ème facette. De même que précédemment, on a :

$$\int_{f_{j}} \mathbf{w}_{i}^{2}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{d}s = \delta_{i}^{j}, \ \forall (i, j) \in \{1, ..., n_{2}\}^{2}$$
(9.10)

où l'intégrale précédente désigne le flux de $\mathbf{w}_i^2(\mathbf{x})$ à travers la facette f_j . De même que pour les arêtes, les fonctions de facette sont définies à partir des fonctions nodales. Pour des éléments classiques possédant trois ou quatre noeuds par faces, elles s'écrivent :

$$\mathbf{w}_{i}^{2} = a \sum_{r \in \mathcal{N}(i)} w_{r}^{0} \left(\mathbf{grad} \sum_{t \in \mathcal{N}\left(r, \overline{r+1}\right)} w_{t}^{0} \right) \times \left(\mathbf{grad} \sum_{t \in \mathcal{N}\left(r, \overline{r-1}\right)} w_{t}^{0} \right)$$
(9.11)

Ici, $\mathcal{N}(i)$ désigne la liste ordonnée des noeuds sur la facette i, et a est une constante qui vaut 2 sur les facettes à trois noeuds et 1 sur celles en possédant 4. Enfin, l'indice cyclique r+1 dans $\mathcal{N}(r,\overline{r+1})$ correspond en réalité au noeud au noeud successif à r dans la liste $\mathcal{N}(i)$.

Remarque 9.1.3 En reprenant l'exemple de l'élément cubique (cf. figure 9.1), et si l'on veut calculer la fonction associée à la facette 'i' composée des noeuds '1458', \mathcal{N} (i) est la liste ordonnée $\{1,4,5,8\}$. dans l'expression précédente, il s'agira donc de sommer sur les noeuds appartenant \mathcal{N} $(r,\overline{r+1})$ 'et \mathcal{N} $(r,\overline{r-1})$ '. En pratique, il s'agira donc de calculer \mathcal{N} $(1,\overline{4})$, \mathcal{N} $(4,\overline{5})$, \mathcal{N} $(5,\overline{8})$ et \mathcal{N} $(8,\overline{1})$ pour le terme ' \mathcal{N} $(r,\overline{r+1})$ ', et \mathcal{N} $(1,\overline{8})$, \mathcal{N} $(8,\overline{5})$, \mathcal{N} $(5,\overline{4})$ et \mathcal{N} $(4,\overline{1})$ pour ' \mathcal{N} $(r,\overline{r-1})$ '.

Ainsi, tout champ vectoriel $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ appartenant à $H(div, \mathcal{D})$ sera approximé dans $\mathbf{W}^2(\mathcal{D}_h)$ par :

$$\mathbf{V}_{h}\left(\mathbf{x}\right) = \sum_{i=1}^{n_{2}} V_{i} \,\mathbf{w}_{i}^{2}\left(\mathbf{x}\right) \tag{9.12}$$

 V_i correspond au flux de \mathbf{V} sur la facette i. Cette fois, c'est la **trace normale** de \mathbf{V}_h qui est **préservée au travers des interfaces**.

9.1.4 Approximation discrète de $L^{2}(\mathcal{D})$

Soit n_3 le nombre d'éléments volumiques du maillage \mathcal{D}_h . On définit l'espace de Whitney permettant d'approcher $L^2(\mathcal{D})$ sur \mathcal{D}_h par :

$$\mathbf{W}^{3}\left(\mathcal{D}_{h}\right) = Vec\left(w_{1}^{3}\left(\mathbf{x}\right), w_{2}^{3}\left(\mathbf{x}\right), ..., w_{n_{2}}^{3}\left(\mathbf{x}\right)\right) \subset L^{2}\left(\mathcal{D}\right)$$

$$(9.13)$$

où $w_i^3(\mathbf{x})$ est une fonction scalaire à valeurs dans \mathbb{R}^+ associée à l'élément i A l'instar des calculs précédents, elles vérifient :

$$\int_{e_{i}} w_{i}^{3}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{d}v = \delta_{i}^{j}, \ \forall (i, j) \in \{1, ..., n_{3}\}^{2}$$
(9.14)

Ici, la fonction scalaire est intégrée sur l'élément e_j . En réalité, les fonctions volumiques sont constantes sur l'élément auquel elles sont associées, et sont nulles sinon. On a ainsi sur l'élément e_i :

$$w_i^3(\mathbf{x}) = \frac{1}{vol(e_i)} \tag{9.15}$$

où $vol(e_i)$ désigne le volume de l'élément e_i .

Finalement, tout champ scalaire $s(\mathbf{x})$ dans $L^2(\mathcal{D})$ sera approximé dans $\mathbf{W}^3(\mathcal{D}_h)$ par une fonction scalaire constante par morceaux :

$$s_h\left(\mathbf{x}\right) = \sum_{i=1}^{n_3} s_i \, w_i^3 \left(\mathbf{x}\right) \tag{9.16}$$

où s_i correspond d'après la propriété précédente au volume de l'élément e_i .

9.1.5 Prise en compte des conditions aux limites ad hoc

Les espaces de Whitney d'ordre minimal permettent donc de définir de façon géométrique des espaces d'approximation de : $H^1(\mathcal{D})$, $H(\mathbf{rot},\mathcal{D})$, $H(div,\mathcal{D})$ et $L^2(\mathcal{D})$. De même, leurs sous-espaces avec les conditions aux limites $ad\ hoc$ sur une frontière Σ sont là aussi définis de façon géométrique et simple.

Par exemple, $H^1_{0,\Sigma}(\mathcal{D})$ contient les fonctions de $H^1(\mathcal{D})$ dont la trace s'annule sur Σ . L'espace discret permettant de l'approcher, $\mathbf{W}^0_{0,\sigma}(\mathbf{D}_h)$, s'obtient directement à partir de $\mathbf{W}^0(\mathbf{D}_h)$ en lui retirant les fonctions associées aux noeuds inclus dans Σ . Ainsi, en notant \mathcal{D}_{Σ} la restriction de \mathbf{D}_h sur le bord de Σ , on a :

$$\mathbf{W}_{0,\Sigma}^{0}\left(\mathbf{D}_{h}\right) = \mathbf{W}^{0}\left(\mathbf{D}_{h}\right) \setminus \mathbf{W}^{0}\left(\mathcal{D}_{\Sigma}\right) \tag{9.17}$$

avec la propriété de conformité préservée :

$$\mathbf{W}_{0,\Sigma}^{0}\left(\mathbf{D}_{h}\right) \subset H_{0,\Sigma}^{1}\left(\mathcal{D}\right) \tag{9.18}$$

De même, on va pouvoir définir $\mathbf{W}_{1,\sigma}^{1}(\mathbf{D}_{h})$, l'espace discrétisant $H_{0,\Sigma}(\mathbf{rot},\mathcal{D})$, en retirant à $\mathbf{W}^{1}(\mathbf{D}_{h})$ les fonctions liées aux arêtes sur Σ . Ainsi, le sous-espace de $\mathbf{W}^{1}(\mathbf{D}_{h})$ possédant les conditions aux limites $ad\ hoc$ sur Σ s'écrit :

$$\mathbf{W}_{0,\Sigma}^{1}(\mathbf{D}_{h}) = \mathbf{W}^{1}(\mathbf{D}_{h}) \setminus \mathbf{W}^{1}(\mathcal{D}_{\Sigma})$$
(9.19)

avec:

$$\mathbf{W}_{0,\Sigma}^{1}\left(\mathbf{D}_{h}\right) \subset H_{0,\Sigma}\left(\mathbf{rot},\mathcal{D}\right) \tag{9.20}$$

De façon générale, on pourra définir l'espace de Whitney avec conditions aux limites ad hoc sur une frontière Σ en lui retirant les fonctions liées aux éléments (noeuds, arêtes et facettes) appartenant à Σ :

$$\mathbf{W}_{0,\Sigma}^{k}\left(\mathbf{D}_{h}\right) = \mathbf{W}^{k}\left(\mathbf{D}_{h}\right) \setminus \mathbf{W}^{k}\left(\mathcal{D}_{\Sigma}\right), \quad k \in \{0,1,2\}$$

$$(9.21)$$

9.2 Problème électrocinétique

9.2.1 Formulation φ en tension imposée

La forme faible de l'équation a pour expression :

$$\int_{\mathcal{D}_c} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi' \cdot \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi \, d\mathcal{D}_c + \int_{\Gamma} \varphi' \, \left(\sigma \operatorname{\mathbf{grad}} \, \varphi \right) \cdot \operatorname{\mathbf{n}} d\Gamma = -\int_{\mathcal{D}_c} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi' \cdot \operatorname{\mathbf{grad}} \alpha V \, d\mathcal{D}_c \qquad (5.69)$$

Le potentiel φ appartient à l'espace des éléments nodaux $\mathcal{W}_{\Gamma_b}^0$:

$$\varphi = \sum_{n \in \mathcal{N}_h} \varphi_n \, w_n^0 \tag{9.22}$$

Par conséquent, l'équation de départ devient :

$$\begin{split} \sum_{n \in \mathcal{N}_h} \varphi_n \; \int_{\mathcal{D}_c} \sigma \, \mathbf{grad} \varphi' \, . \, \mathbf{grad} w_n^0 \, d\mathcal{D}_c \\ &+ \sum_{n \in \mathcal{N}_h} \varphi_n \; \int_{\Gamma} \varphi' \; \left(\sigma \, \mathbf{grad} \; w_n^0 \right) \, . \, \mathbf{n} \, d\Gamma \\ &= - \int_{\mathcal{D}_c} \sigma \, \mathbf{grad} \varphi' \, . \, \mathbf{grad} \alpha V \, d\mathcal{D}_c \quad (9.23) \end{split}$$

On rappelle que $\Gamma = \Gamma_h \cup \Gamma_b$. Du fait de sa définition dans $\mathcal{W}_{\Gamma_b}^0$, le potentiel φ est nul sur Γ_b . On impose donc naturellement au sens fort $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$ sur Γ_b . De plus, en annulant le calcul de l'intégrale de surface sur Γ_h , on impose $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$ au sens faible. La forme intégrale s'écrit alors :

$$\sum_{n \in \mathcal{N}_b} \varphi_n \int_{\mathcal{D}_c} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi' \cdot \operatorname{\mathbf{grad}} w_n^0 d\mathcal{D}_c = -\int_{\mathcal{D}_c} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi' \cdot \operatorname{\mathbf{grad}} \alpha V d\mathcal{D}_c$$
(9.24)

On prend donc comme fonction-test:

$$\varphi' = w_i^0$$

Alors, l'expression 5.69 devient sous sa forme intégrale :

$$\forall w_i^0 \in \mathcal{W}_{\Gamma_b}^0 \quad \sum_{n \in \mathcal{N}_h} \varphi_n \int_{\mathcal{D}_c} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} w_i^0 \cdot \operatorname{\mathbf{grad}} w_n^0 \, d\mathcal{D}_c = -\int_{\mathcal{D}_c} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} w_i^0 \cdot \operatorname{\mathbf{grad}} \alpha V \, d\mathcal{D}_c \quad (9.25)$$

9.2.2 Formulation φ en courant imposé

Pour imposer le courant avec la formulation en potentiel scalaire, on a vu qu'il fallait exprimer alors β et J en fonction de α et du potentiel scalaire électrique ϕ_I . La formulation en potentiel scalaire électrique à courant imposé s'écrit :

$$\operatorname{div} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi + \operatorname{div} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} \alpha V = 0$$

$$\int_{\mathcal{D}_c} \operatorname{\mathbf{grad}} \alpha \cdot \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} (\varphi + \alpha V) d\mathcal{D}_c = I$$
(3.28)

La tension devient alors une inconnue lorsque l'on impose le courant. Alors, l'expression 3.28 devient sous sa forme intégrale :

$$\forall w_i^0 \in \mathcal{W}_{\Gamma_b}^0 \quad \sum_{n \in \mathcal{N}_h} \varphi_n \int_{\mathcal{D}_c} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} w_i^0 \cdot \operatorname{\mathbf{grad}} w_n^0 \, d\mathcal{D}_c + \int_{\mathcal{D}_c} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} w_i^0 \cdot \operatorname{\mathbf{grad}} \alpha V \, d\mathcal{D}_c = 0$$

$$\sum_{n \in \mathcal{N}_h} \varphi_n \int_{\mathcal{D}_c} \operatorname{\mathbf{grad}} \alpha \cdot \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} \left(w_n^0 + \alpha V \right) \, d\mathcal{D}_c = I$$

$$(9.26)$$

9.2.3 Formulation T

La forme faible obtenue est :

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} \mathcal{U} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{T} d\mathcal{D} = -\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} \mathcal{U} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}_{s} d\mathcal{D}$$
(5.73)

avec $\mathbf{H}_s = \sum_{a \in \mathcal{A}} \mathbf{w}_a \, h_{a,s}$ où $h_{a,s}$ est la circulation de \mathbf{H}_s calculée sur les arêtes du maillage avec la technique de l'arbre.

Le potentiel **T** est recherché dans $\mathcal{W}_{\Gamma_h}^1$:

$$\mathbf{T} = \sum_{a \in \mathcal{A}_h} T_a \, \mathbf{w}_a^1 \tag{9.27}$$

On prend comme fonction-test:

$$\mathcal{U} = \mathbf{w}_i^1$$

L'expression 5.73 devient sous forme intégrale :

$$\forall \mathbf{w}_{i}^{1} \in \mathcal{W}_{\Gamma_{h}}^{1} \quad \sum_{a \in \mathcal{A}_{h}} T_{a} \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{w}_{i}^{1} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a}^{1} d\mathcal{D} = -\sum_{a \in \mathcal{A}} h_{a,s} \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{w}_{i}^{1} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a}^{1} d\mathcal{D} \quad (9.28)$$

Pour avoir l'unicité de la solution il est nécessaire d'imposer une condition de jauge. Cependant, si on utilise la méthode du gradient conjugué pour résoudre le système d'équations, le problème est automatiquement "jaugé" comme dans le cas de la formulation en potentiel vecteur magnétique [Ren 1996][Ren 1996b].

9.3 Problème magnétostatique

9.3.1 Formulation A

La forme faible de l'équation a pour expression :

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A}' \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A} \, d\mathcal{D} - \int_{\Gamma} \mathbf{A}' \cdot \left(\mathbf{n} \times \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \, \mathbf{A} \right) d\Gamma = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{A}' \cdot \mathbf{J}_s \, d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \, \mathbf{A}' \cdot \mathbf{rot} \, \mathbf{B}_r \, d\mathcal{D} \quad (5.53)$$

Le potentiel vecteur magnétique ${\bf A}$ appartient à l'espace des éléments d'arêtes. Sa forme discrète s'écrit donc :

$$\mathbf{A} = \sum_{a \in A} \mathbf{w}_a^1 a_a \quad \mathbf{A} \in \mathcal{W}_{\Gamma_b}^1 \tag{9.29}$$

où a_a est la circulation du potentiel vecteur \mathbf{A} sur l'arête 'a'. La forme intégrale de la formulation à résoudre est donc (cf. équation 5.53) en prenant comme fonction-test $\mathbf{w}_i^1 \in \mathcal{W}_{\Gamma_k}^1$:

$$\int_{\mathcal{D}} \mathbf{rot} \mathbf{w}_{i}^{1} \mathbf{rot} \mathbf{A} d\mathcal{D} - \int_{\Gamma} \mathbf{w}_{i}^{1} \cdot \left(\mathbf{n} \times \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} \right) d\Gamma = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{w}_{i}^{1} \cdot \mathbf{J}_{s} d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{w}_{i}^{1} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{B}_{r} d\mathcal{D} \quad (9.30)$$

avec:

$$J_s^d = \sum_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{w}_f^2 \, j_s^d$$

La densité de courant est discrétisée dans l'espace des éléments de facettes.

L'intégrale sur Γ se décompose comme précédemment en deux termes. Le premier sur Γ_b s'élimine naturellement ce qui entraı̂ne $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ imposé au sens fort. En annulant le second (sur Γ_b) on impose $\mathbf{H} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ au sens faible. L'équation 9.30 devient alors :

$$\int_{\mathcal{D}} \mathbf{rot} \mathbf{w}_{i}^{1} \mathbf{rot} \mathbf{A} d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{w}_{i}^{1} . \mathbf{J}_{s}^{d} d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{w}_{i}^{1} . \mathbf{rot} \mathbf{B}_{r} d\mathcal{D}$$

$$(9.31)$$

Ceci conduit à la formulation intégrale finale :

$$\forall \mathbf{w}_{i}^{1} \in \mathcal{W}_{\Gamma_{b}}^{1} \quad \sum_{a \in \mathcal{A}} a_{a} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{rot} \mathbf{w}_{i}^{1} \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a}^{1} d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{J}_{s} \cdot \mathbf{w}_{i}^{1} d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{w}_{i}^{1} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{B}_{r} d\mathcal{D}$$
(9.32)

Dans ce cas, une résolution par la méthode gradient conjugué conduit à un système automatiquement jaugé [Ren 1996b]. Dans ces conditions, l'utilisation d'une jauge de type $\bf A$. $\bf w$ n'est donc plus nécessaire.

9.3.2 Formulation Ω

La forme faible de la formulation a pour expression :

$$\int_{\mathcal{D}} \mu \left(\mathbf{grad} \, \Omega' \, . \, \mathbf{grad} \, \Omega - \mathbf{grad} \, \Omega' \, . \, \mathbf{H}_s \right) \, d\mathcal{D} + \int_{\Gamma} \Omega' \left(\mu \, \mathbf{grad} \, \Omega \right) \, d\gamma = -\int_{\mathcal{D}} \Omega' \, \mathrm{div} \, \mathbf{B}_r d\mathcal{D} \quad (5.58)$$

Le potentiel scalaire Ω appartient à l'espace des éléments nodaux \mathcal{W}_h^0 , il peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$\Omega = \sum_{n \in \mathcal{N}_n} w_n^0 \, \Omega_n \tag{9.33}$$

On prend donc comme function-test $w_i^0 \in \mathcal{W}_h^0$, alors:

$$\int_{\mathcal{D}} \mu \left(\mathbf{grad} \, w_i^{\ 0} \, . \, \mathbf{grad} \, \Omega - \mathbf{grad} \, w_i^{\ 0} \, . \, \mathbf{H}_s \right) \, d\mathcal{D} + \int_{\Gamma} w_i^{0} \left(\mu \, \mathbf{grad} \, \Omega \right) \, d\gamma = -\int_{\mathcal{D}} w_i^{0} \, \mathrm{div} \, \mathbf{B}_r d\mathcal{D} \quad (9.34)$$

où, H_s qui représente le champ source, est calculé à partir de J_0^d et décomposé dans l'espace \mathcal{W}_h^1 .

Pour l'intégrale de surface Γ , on a sur Γ_h , $w_i^0=0$ ce qui impose $\mathbf{H}\times\mathbf{n}=0$ au sens fort. Par contre, en annulant l'intégrale sur Γ_b , la condition $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}=0$ est imposée au sens faible. Dans ces conditions, l'équation précédente s'écrit :

$$\forall w_i^0 \in \mathcal{W}_{\Gamma_h}^0 \quad \sum_{n \in \mathcal{N}_h} \Omega_n \int_{\mathcal{D}} \mu \operatorname{\mathbf{grad}} w_i^0 \cdot \operatorname{\mathbf{grad}} w_n^0 d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \mu \operatorname{\mathbf{grad}} w_i^0 \cdot \operatorname{\mathbf{H}}_s d\mathcal{D} - \int_{\mathcal{D}} w_i^0 \operatorname{div} \operatorname{\mathbf{B}}_r d\mathcal{D} \quad (9.35)$$

9.4 Problème magnétodynamique

9.4.1 Projection en espace uniquement

9.4.1.1 Formulation A - φ

La forme faible de cette formulation est donnée par les expressions :

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A}' \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A} + \sigma \mathbf{A}' \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \, \varphi \right) \right] \, d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{A}' \, d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \, \mathbf{B_r} \cdot \mathbf{A}' \, d\mathcal{D} \quad (5.28)$$

$$\int_{\mathcal{D}} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi' \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi \right) d\mathcal{D} = 0$$
(9.36)

Cette formulation possède deux inconnues : le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} et le potentiel scalaire électrique φ définis dans l'espace des éléments de Whitney de la manière suivante :

$$\varphi = \sum_{n \in \mathcal{N}_b} w_n^0 \varphi_n \quad \varphi \in \mathcal{W}_{\Gamma_b}^0 \tag{9.37}$$

$$\mathbf{A} = \sum_{a \in \mathcal{A}_h} \mathbf{w}_a^1 a_a \quad \mathbf{A} \in \mathcal{W}_{\Gamma_b}^1 \tag{9.38}$$

On prendra donc:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{w}_i^1$$

et

$$\varphi' = w_i^0$$

Le système d'équations 5.28 s'écrit alors :

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{w}_{i}^{1} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A} + \sigma \mathbf{w}_{i}^{1} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) \right] d\mathcal{D} =
\int_{\mathcal{D}} \mathbf{J}_{s} \cdot \mathbf{w}_{i}^{1} d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{B}_{r} \cdot \mathbf{w}_{i}^{1} d\mathcal{D} \quad (9.39)
\int_{\mathcal{D}} \sigma \mathbf{grad} w_{i}^{0} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) d\mathcal{D} = 0 \quad (9.40)$$

La première équation correspond au théorème d'Ampère et la deuxième à la conservation du flux de la densité de courant.

Comme nous l'avons déjà signalé plus haut, les intégrales de surfaces disparaissent. Cela revient à imposer fortement les conditions aux limites sur Γ_b ($\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$ et $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$) et faiblement celles sur Γ_h ($\mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0$ et $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$).

Contrairement aux expressions des paragraphes précédents, la formulation faible fait apparaître ici des dérivations en temps. Elles seront traitées au paragraphe 9.5.

9.4.1.2 Formulation $T-\Omega$

La formulation faible s'écrit :

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{T} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{T}' + \mathbf{T}' \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mu \left(\mathbf{T} - \mathbf{grad} \, \Omega \right) \right] d\mathcal{D} - \int_{\partial \mathcal{D}} \left(\mathbf{E} \times \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{T}' \, d\gamma =$$

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{Hs} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{T}' + \mathbf{T}' \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \, \mathbf{H_s} + \mathbf{B}_r \right) \right] d\mathcal{D} \quad (5.44)$$

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\operatorname{grad}\Omega' \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mu \left(\mathbf{T} - \operatorname{\mathbf{grad}}\Omega \right) \right] d\mathcal{D} - \int_{\partial \mathcal{D}} \left(\mathbf{E} \times \mathbf{n} \right) \cdot \operatorname{\mathbf{grad}}\Omega' d\gamma = \int_{\mathcal{D}} \left[\operatorname{\mathbf{grad}}\Omega' \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \operatorname{\mathbf{H_s}} + \operatorname{\mathbf{B}}_r \right) \right] d\mathcal{D} \quad (5.45)$$

Cette formulation possède également deux inconnues : le potentiel vecteur électrique ${\bf T}$ et le potentiel scalaire magnétique Ω définis dans l'espace des éléments de Whitney de la manière suivante :

$$\Omega = \sum_{n \in \mathcal{N}_t} w_n^0 \, \Omega_n \quad \Omega \in \mathcal{W}_h^0 \tag{9.41}$$

$$\mathbf{T} = \sum_{a \in \mathcal{A}_h} \mathbf{w}_a^1 t_a \quad \mathbf{T} \in \mathcal{W}_h^1 \tag{9.42}$$

On prend comme fonction-tests:

$$\mathbf{T}' = \mathbf{w}_i^1$$

et:

$$\Omega' = w_i^0$$

Les deux équations 5.44 et 5.45 deviennent alors :

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{T} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}_{i}^{1} + \mathbf{w}_{i}^{1} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mu \left(\mathbf{T} - \mathbf{grad} \, \Omega \right) \right] d\mathcal{D} - \int_{\partial \mathcal{D}} \left(\mathbf{E} \times \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{w}_{i}^{1} \, d\gamma =$$

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{H}_{s} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}_{i}^{1} + \mathbf{w}_{i}^{1} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \, \mathbf{H}_{s} + \mathbf{B}_{r} \right) \right] d\mathcal{D} \quad (9.43)$$

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\mathbf{grad} w_{i}^{0} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mu \left(\mathbf{T} - \mathbf{grad} \Omega \right) \right] d\mathcal{D} - \int_{\partial \mathcal{D}} \left(\mathbf{E} \times \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{grad} w_{i}^{0} d\gamma =$$

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\mathbf{grad} w_{i}^{0} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \mathbf{H}_{s} + \mathbf{B}_{r} \right) \right] d\mathcal{D} \quad (9.44)$$

Pour cette formulation, à partir des raisonnements menés aux paragraphes plus haut, les intégrales de surface sur Γ disparaissent. On impose alors au sens faible les conditions aux limites sur Γ_b ($\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$ et $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$) et au sens fort celles sur Γ_h ($\mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0$ et $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$).

En intégrant en temps cette dernière équation, on obtient :

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\mathbf{grad} w_i^0 \cdot \mu \left(\mathbf{T} - \mathbf{grad} \Omega \right) \right] d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \left[\mathbf{grad} w_i^0 \cdot \left(\mu \mathbf{H_s} + \mathbf{B}_r \right) \right] d\mathcal{D}$$
(9.45)

La forme faible intégrale s'écrit avec ces considérations :

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{T} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}_{i}^{1} + \mathbf{w}_{i}^{1} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mu \left(\mathbf{T} - \mathbf{grad} \Omega \right) \right] d\mathcal{D} =
\int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{H}_{s} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}_{i}^{1} + \mathbf{w}_{i}^{1} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \mathbf{H}_{s} + \mathbf{B}_{r} \right) \right] d\mathcal{D} \quad (9.46)$$

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\mathbf{grad} \mathbf{w}_{i}^{0} \cdot \mu \left(\mathbf{T} - \mathbf{grad} \Omega \right) \right] d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \left[\mathbf{grad} \mathbf{w}_{i}^{0} \cdot \left(\mu \mathbf{H}_{s} + \mathbf{B}_{r} \right) \right] d\mathcal{D} \quad (9.47)$$

Contrairement aux expressions des paragraphes précédents, la formulation faible fait apparaître ici des dérivations en temps. Elles seront traitées au paragraphe 9.5.

9.4.2 Projection en espace et en temps

Une manière d'obtenir le régime permanent sans calculer le régime transitoire, lorsque la source d'alimentation est multiharmonique et de forme sinusoïdale, est d'utiliser la méthode Harmonic $Balance\ Method$. C'est une approche spectrale de type Fourier qui permet d'obtenir une représentation spectrale (série de Fourier) de la solution recherchée lorsque les grandeurs du système étudié sont périodiques. Lorsque les grandeurs ne sont plus périodiques, la base de Fourier n'est plus adaptée. On se propose donc ici de développer des approches spectrales où les bases de discrétisation de la dimension temporelle retenues s'adaptent aux propriétés (périodicité, régularité et continuité) de des grandeurs électromagnétiques. On introduit l'espace de dimension finie $\mathcal{C} = \{\psi_i\}_{i=1}^{n_t}$

9.4.2.1 Formulation A - φ

Avec l'écriture retenue au paragraphe 7, en introduisant les expressions 7.37 à 7.43 dans 5.35, la forme faible du problème s'écrit :

$$\begin{split} \int_{\mathcal{T}} \left\{ \sum_{i} A_{i} \left(t \right) \int_{\mathcal{D}} \overline{\boldsymbol{\nu}} \left(\mathbf{x} \right) \, \mathbf{rot} \mathbf{w}_{i}^{1} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A}' \, d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{D}} \mathcal{K} \left(\mathbf{A} \right) \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A}' \, d\mathcal{D} \right\} dt \\ + \int_{\mathcal{T}} \left\{ \sum_{i} A_{i}^{\partial} \left(t \right) \int_{\mathcal{D}} \sigma \, \mathbf{w}_{i}^{1} \cdot \mathbf{A}' \, d\mathcal{D} \right\} dt + \int_{\mathcal{T}} \left\{ \sum_{j} \varphi_{j} \left(t \right) \int_{\mathcal{D}} \sigma \, w_{i}^{0} \cdot \mathbf{A}' \, d\mathcal{D} \right\} dt = \\ \int_{\mathcal{T}} \left\{ \sum_{l} J_{l}^{0} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{w}_{l}^{2} \cdot \mathbf{A}' \, d\mathcal{D} + \sum_{l} B_{l}^{r} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{w}_{l}^{2} \cdot \mathbf{A}' \, d\mathcal{D} + \sum_{l} H_{l}^{\Gamma} \int_{\Gamma} \left(\mathbf{w}_{l}^{1} \times \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{A}' \, d\mathcal{D} \right\} dt \\ \int_{\mathcal{T}} \left\{ \sum_{i} A_{i}^{\partial} \left(t \right) \int_{\mathcal{D}} \sigma \, \mathbf{w}_{i}^{1} \cdot \mathbf{grad} \varphi' \, d\mathcal{D} + \sum_{j} \varphi_{j} \left(t \right) \int_{\mathcal{D}} \sigma \, \mathbf{grad} w_{j}^{0} \cdot \mathbf{grad} \varphi' \, d\mathcal{D} \right\} dt \\ \int_{\mathcal{T}} \left\{ \sum_{l} J_{l}^{0} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{w}_{l}^{2} \cdot \mathbf{grad} \varphi' \, d\mathcal{D} + \sum_{l} J_{l}^{\Gamma} \int_{\Gamma} \left(\mathbf{w}_{l}^{2} \times \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{grad} \varphi' \, d\mathcal{D} \right\} dt \end{split}$$

On applique la méthode de Galerkin en prenant comme fonction test :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{w}_f^1$$

et

$$\varphi' = w_a^0$$

$$\int_{\mathcal{T}} \left\{ \sum_{i} A_{i} \left(t \right) \int_{\mathcal{D}} \overline{\nu} \left(\mathbf{x} \right) \mathbf{rot} \mathbf{w}_{i}^{1} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}_{f}^{1} d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{D}} \mathcal{K} \left(\mathbf{A} \right) \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}_{f}^{1} d\mathcal{D} \right\} dt \\
+ \int_{\mathcal{T}} \left\{ \sum_{i} A_{i}^{\partial} \left(t \right) \int_{\mathcal{D}} \sigma \mathbf{w}_{i}^{1} \cdot \mathbf{w}_{f}^{1} d\mathcal{D} \right\} dt + \int_{\mathcal{T}} \left\{ \sum_{j} \varphi_{j} \left(t \right) \int_{\mathcal{D}} \sigma w_{i}^{0} \cdot \mathbf{w}_{f}^{1} d\mathcal{D} \right\} dt = \\
\int_{\mathcal{T}} \left\{ \sum_{l} J_{l}^{0} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{w}_{l}^{2} \cdot \mathbf{w}_{f}^{1} d\mathcal{D} + \sum_{l} B_{l}^{r} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{w}_{l}^{2} \cdot \mathbf{w}_{f}^{1} d\mathcal{D} + \sum_{l} H_{l}^{\Gamma} \int_{\Gamma} \left(\mathbf{w}_{l}^{1} \times \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{w}_{f}^{1} d\mathcal{D} \right\} dt \\
\int_{\mathcal{T}} \left\{ \sum_{i} A_{i}^{\partial} \left(t \right) \int_{\mathcal{D}} \sigma \mathbf{w}_{i}^{1} \cdot \mathbf{grad} w_{g}^{0} d\mathcal{D} + \sum_{j} \varphi_{j} \left(t \right) \int_{\mathcal{D}} \sigma \mathbf{grad} w_{j}^{0} \cdot \mathbf{grad} w_{g}^{0} d\mathcal{D} \right\} dt \\
\int_{\mathcal{T}} \left\{ \sum_{l} J_{l}^{0} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{w}_{l}^{2} \cdot \mathbf{grad} w_{g}^{0} d\mathcal{D} + \sum_{l} J_{l}^{\Gamma} \int_{\Gamma} \left(\mathbf{w}_{l}^{2} \times \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{grad} w_{g}^{0} d\mathcal{D} \right\} dt \\
\int_{\mathcal{T}} \left\{ \sum_{l} J_{l}^{0} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{w}_{l}^{2} \cdot \mathbf{grad} w_{g}^{0} d\mathcal{D} + \sum_{l} J_{l}^{\Gamma} \int_{\Gamma} \left(\mathbf{w}_{l}^{2} \times \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{grad} w_{g}^{0} d\mathcal{D} \right\} dt \\
= \int_{\mathcal{T}} \left\{ \sum_{l} J_{l}^{0} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{w}_{l}^{2} \cdot \mathbf{grad} w_{g}^{0} d\mathcal{D} + \sum_{l} J_{l}^{\Gamma} \int_{\Gamma} \left(\mathbf{w}_{l}^{2} \times \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{grad} w_{g}^{0} d\mathcal{D} \right\} dt \\
= \int_{\mathcal{T}} \left\{ \sum_{l} J_{l}^{0} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{w}_{l}^{2} \cdot \mathbf{grad} w_{g}^{0} d\mathcal{D} + \sum_{l} J_{l}^{\Gamma} \int_{\Gamma} \left(\mathbf{w}_{l}^{2} \times \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{grad} w_{g}^{0} d\mathcal{D} \right\} dt \\
= \int_{\mathcal{T}} \left\{ \sum_{l} J_{l}^{0} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{w}_{l}^{2} \cdot \mathbf{grad} w_{g}^{0} d\mathcal{D} + \sum_{l} J_{l}^{\Gamma} \int_{\Gamma} \left(\mathbf{w}_{l}^{2} \times \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{grad} w_{g}^{0} d\mathcal{D} \right\} dt \\
= \int_{\mathcal{T}} \left\{ \sum_{l} J_{l}^{0} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{w}_{l}^{2} \cdot \mathbf{grad} w_{g}^{0} d\mathcal{D} + \sum_{l} J_{l}^{\Gamma} \int_{\Gamma} \left(\mathbf{w}_{l}^{2} \times \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{grad} w_{g}^{0} d\mathcal{D} \right\} dt \\
= \int_{\mathcal{T}} \left\{ \sum_{l} J_{l}^{0} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{w}_{l}^{2} \cdot \mathbf{grad} w_{g}^{0} d\mathcal{D} + \sum_{l} J_{l}^{0} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{grad} w_{g}^{0} d\mathcal{D} \right\} d\mathcal{D} \right\} d\mathcal{D}$$

Pour tout : $(f,g) : 1 \le f \le n_1, \ 1 \le g \le n_0$

9.5 Discrétisation en temps

9.5.1 Discrétisation de la forme faible

La méthode d'Euler implicite est utilisée dans code_Carmel temporel. Elle consiste à écrire pour une variable U [Dhatt, Thouzot 1984] :

$$\dot{U}_{t+\Delta t} \simeq \frac{1}{\Delta t} \left(U_{t+\Delta t} - U_t \right) \tag{9.49}$$

Si on indice la variable:

$$\begin{array}{ccc} n & \to & t \\ n+1 & \to & t+\Delta t \end{array}$$

alors l'expression précédente devient :

$$\dot{U}_{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \left(U_{n+1} - U_n \right) \tag{9.50}$$

9.5.2 Magnétodynamique

9.5.2.1 Formulation A - φ

L'expression obtenue précédemment pour la forme intégrale faible en potentiel vecteur magnétique et potentiel scalaire électrique est :

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{w'}_{a}^{1} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A} + \sigma \mathbf{w'}_{a}^{1} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) \right] d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{J}_{s} \cdot \mathbf{w'}_{a}^{1} d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{B}_{r} \cdot \mathbf{w'}_{a}^{1} d\mathcal{D}
\int_{\mathcal{D}} \sigma \, \mathbf{grad} w'_{n}^{0} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) d\mathcal{D} = 0$$
(9.39)

On réécrit ces expressions à l'instant i+1 pour les variables dépendant du temps :

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{w'}_{a}^{1} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A}_{(i+1)} + \sigma \mathbf{w'}_{a}^{1} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}_{(i+1)} + \mathbf{grad} \, \varphi_{(i+1)} \right) \right] d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{J}_{\mathbf{s}(i+1)} \cdot \mathbf{w'}_{a}^{1} d\mathcal{D}
+ \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{B}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{w'}_{a}^{1} d\mathcal{D}
\int_{\mathcal{D}} \sigma \, \mathbf{grad} w'_{n}^{0} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}_{(i+1)} + \mathbf{grad} \, \varphi_{(i+1)} \right) d\mathcal{D} = 0$$
(9.51)

En appliquant la méthode d'Euler implicite, le système d'équations devient :

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{w'}_{a}^{1} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A}_{(i+1)} + \sigma \mathbf{w'}_{a}^{1} \cdot \left(\frac{\mathbf{A}_{(i+1)}}{\Delta t} + \mathbf{grad} \, \varphi_{(i+1)} \right) \right] d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{J}_{\mathbf{s}(i+1)} \cdot \mathbf{w'}_{a}^{1} d\mathcal{D}
+ \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{B}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{w'}_{a}^{1} d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{D}} \sigma \mathbf{w'}_{a}^{1} \frac{\mathbf{A}_{(i)}}{\Delta t} d\mathcal{D}
+ \int_{\mathcal{D}} \sigma \mathbf{grad} \mathbf{w'}_{n}^{0} \left(\frac{\mathbf{A}_{(i+1)}}{\Delta t} + \mathbf{grad} \, \varphi_{(i+1)} \right) d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \sigma \mathbf{grad} \mathbf{w'}_{n}^{0} \frac{\mathbf{A}_{(i)}}{\Delta t} d\mathcal{D}$$
(9.52)

On sait que l'on peut écrire :

$$\mathbf{A}_{(i+1)} = \sum_{\substack{a=1\\n_1}}^{n_1} a_a(i+1) \mathbf{w}_a^1$$

$$\mathbf{A}_{(i)} = \sum_{\substack{a=1\\n_0}}^{n_1} a_a(i) \mathbf{w}_a^1$$

$$\varphi_{(i+1)} = \sum_{n=1}^{n_0} \phi_n(i+1) w_n^0$$
(9.53)

Le système d'équation devient alors :

$$\sum_{a=1}^{n_1} a_a(i+1) \left[\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{w}'_a^1 \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}_a^1 d\mathcal{D} + \frac{1}{\Delta t} \int_{\mathcal{D}} \sigma \, \mathbf{w}'_a^1 \cdot \mathbf{w}_a^1 d\mathcal{D} \right] +$$

$$\sum_{n=1}^{n_0} \phi_n(i+1) \int_{\mathcal{D}} \sigma \mathbf{w}'_a^1 w_n^0 d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{J}_{\mathbf{s}(i+1)} \cdot \mathbf{w}'_a^1 d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \, \mathbf{B}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{w}'_a^1 d\mathcal{D} +$$

$$\sum_{a=1}^{n_1} a_a(i) \frac{1}{\Delta t} \int_{\mathcal{D}} \sigma \, \mathbf{w}'_a^1 \cdot \mathbf{w}_a^1 d\mathcal{D}$$

$$(9.54)$$

$$\sum_{a=1}^{n_1} a_a(i+1) \frac{1}{\Delta t} \int_{\mathcal{D}} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} w_n^{\prime 0} \mathbf{w}_a^1 d\mathcal{D} + \sum_{n=1}^{n_0} \phi_n(i+1) \int_{\mathcal{D}} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} w_n^{\prime 0} \operatorname{\mathbf{grad}} w_n^0 d\mathcal{D} = + \sum_{a=1}^{n_1} a_a(i) \frac{1}{\Delta t} \int_{\mathcal{D}} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} w_n^{\prime 0} \mathbf{w}_a^1 d\mathcal{D}$$

$$(9.55)$$

9.5.2.2 Formulation T- Ω

L'expression obtenue précédemment pour la forme intégrale faible en potentiel vecteur électrique et potentiel scalaire magnétique est :

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{T} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w'}_{a}^{1} + \mathbf{w'}_{a}^{1} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mu \left(\mathbf{T} - \mathbf{grad} \, \Omega \right) \right] d\mathcal{D} =$$

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{Hs} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w'}_{a}^{1} + \mathbf{w'}_{a}^{1} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \, \mathbf{H_s} + \mathbf{B}_r \right) \right] d\mathcal{D} \quad (9.46)$$

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\mathbf{grad} w'_{n}^{0} \cdot \mu \left(\mathbf{T} - \mathbf{grad} \Omega \right) \right] d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \left[\mathbf{grad} w'_{n}^{0} \cdot \left(\mu \mathbf{H_{s}} + \mathbf{B}_{r} \right) \right] d\mathcal{D}$$
(9.47)

Seule la première équation dépend explicitement du temps. Compte tenu de la discrétisation de type Euler implicite, elle devient :

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{T}_{(i+1)} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w'}_{a}^{1} + \mathbf{w'}_{a}^{1} \cdot \frac{1}{\Delta t} \mu \left(\mathbf{T}_{(i+1)} - \mathbf{T}_{(i)} - \mathbf{grad}_{(i+1)} + \mathbf{grad}_{(i)} \Omega \right) \right] d\mathcal{D} =$$

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{Hs} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w'}_{a}^{1} + \mathbf{w'}_{a}^{1} \cdot \frac{1}{\Delta t} \left(\mu \mathbf{H}_{\mathbf{s}(i+1)} - \mathbf{H}_{\mathbf{s}(i)} + \mathbf{B}_{r(i+1)} - \mathbf{B}_{r(i)} \right) \right] d\mathcal{D} \quad (9.56)$$
ou encore:

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{T}_{(i+1)} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w'}_{a}^{1} + \mathbf{w'}_{a}^{1} \cdot \frac{1}{\Delta t} \mu \left(\mathbf{T}_{(i+1)} - \mathbf{grad} \Omega_{(i+1)} \right) \right] d\mathcal{D} =
\int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{H} \mathbf{s}_{(i+1)} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w'}_{a}^{1} + \mathbf{w'}_{a}^{1} \cdot \frac{1}{\Delta t} \left(\mu \mathbf{H}_{\mathbf{s}(i+1)} - \mu \mathbf{H}_{\mathbf{s}(i)} + \mathbf{B}_{r(i+1)} - \mathbf{B}_{r(i)} \right) \right] d\mathcal{D}
+ \int_{\mathcal{D}} \mathbf{w'}_{a}^{1} \cdot \frac{1}{\Delta t} \mu \left(\mathbf{T}_{(i)} - \mathbf{grad} \Omega_{(i)} \right) d\mathcal{D} \quad (9.57)$$

9.6 Équations avec grandeurs globales

9.6.1 Cas d'une tension imposée sur un conducteur bobiné

On a établi l'équation supplémentaire 3.43 pour l'expression en tension imposée sur un conducteur filaire :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{N} \, d\mathcal{D} + R \, i = V \tag{9.58}$$

Comme précédemment cette équation est discrétisée à l'aide de la méthode Euler implicite :

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{\mathbf{A}_{(i+1)}}{\Delta t} \cdot \mathbf{N} \, d\mathcal{D} - \int_{\mathcal{D}} \frac{\mathbf{A}_{(i)}}{\Delta t} \cdot \mathbf{N} \, d\mathcal{D} + R \, i = V$$
(9.59)

On sait que l'on peut écrire :

$$\mathbf{A}_{(i+1)} = \sum_{\substack{a=1\\n_1}}^{n_1} a_a(i+1) \mathbf{w}_a^1$$
$$\mathbf{A}_{(i)} = \sum_{\substack{a=1\\n_1}}^{n_1} a_a(i) \mathbf{w}_a^1$$

Ceci conduit à l'équation supplémentaire :

$$\sum_{a=1}^{n_1} a_a(i+1) \frac{1}{\Delta t} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{w}_a^1 \cdot \mathbf{N} d\mathcal{D} + R i = \sum_{a=1}^{n_1} a_a(i) \frac{1}{\Delta t} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{w}_a^1 \cdot \mathbf{N} d\mathcal{D}$$
(9.60)

9.7 Résolution des problèmes discrets

9.7.1 Écriture matricielle générique

Dans les paragraphes précédents, on a vu que la modélisation de dispositifs électrotechniques peut générer une quantité de problèmes différents, en fonction de la formulation utilisée et de la prise en compte ou non du couplage électrique ou mécanique. En reprenant les approches présentées plus haut, l'ensemble de ces modèles peut être représenté par le problème générique suivant :

Trouver $\mathbf{X}(t) \in \mathbb{R}^N$ tel que :

$$\mathbf{K} \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} + (\mathbf{M}_{\theta}(\theta) + \mathbf{M}(\mathbf{X})) \mathbf{X}(t) = \mathbf{C} \mathbf{U}(t), \quad \forall t \in [0, T],$$
(9.61)

et trouver $\theta(t) \in \mathbb{R}$ tel que :

$$J_{M} \frac{d^{2}\theta(t)}{dt^{2}} + f_{M} \frac{d\theta(t)}{dt} = \Gamma_{B}(\mathbf{X}) + \Gamma_{M}(t)$$

$$(9.62)$$

9.7.2 Discrétisation temporelle

Afin de résoudre le couple d'équations 9.61 et 9.62, on discrétise le domaine temporel [0,T] en N_t intervalles réguliers séparés par un pas de temps $\tau = \frac{T}{N_t}$. Le choix de ce pas de temps n'est pas anodin, il devra être pris suffisamment petit pour capturer les différentes dynamiques du problème (électriques, magnétiques ou mécaniques). Ainsi, on ne résoudra le problème que sur les N_t temps $t^k = k \, \tau, \ k = 1, ..., N_t$, avec les conditions initiales imposées pour $t^0 = 0$. On définit alors la notation

$$\mathbf{X}\left(t^{k}\right) = \mathbf{X}^{k}, \ k = 0, ..., N^{t}$$

$$(9.63)$$

L'étape suivante est donc d'exprimer les dérivées en temps, à savoir $\frac{d\mathbf{X}}{dt} \left(t^k \right)$ et $\frac{d^2\theta}{dt^2} \left(t^k \right)$.

9.7.2.1 Discrétisation temporelle de l'équation magnétique

Afin de discrétiser l'équation magnétique, on s'intéresse à l'expression de la dérivée temporelle de $\mathbf{X}(t)$. Nous utilisons ici un schéma d'Euler implicite qui a l'avantage d'être à la fois stable et facilement implémentable. Dans ce cas, cette dernière s'écrit :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}\left(t^{k}\right) \simeq \frac{\mathbf{X}^{k} - \mathbf{X}^{k-1}}{\tau} \ k = 1, ..., N_{t}$$

$$(9.64)$$

En reportant cette expression dans l'équation magnétique, on écrit :

$$\left(\frac{\mathbf{K}}{\tau} + \mathbf{M}_{\theta}(\theta) + \mathbf{M}(\mathbf{X}^{k})\right) \mathbf{X}^{k} = \mathbf{C} \mathbf{U}^{k} + \frac{\mathbf{K}}{\tau} \mathbf{X}^{k-1}, \ k = 1, ..., N^{t}$$
(9.65)

9.7.2.2 Discrétisation temporelle de l'équation mécanique

En ce qui concerne l'équation mécanique du second ordre en temps, on a la décompose en deux équations du premier ordre grâce à l'introduction de $\Omega = \frac{d\theta}{dt}$. On écrit alors :

$$\begin{cases}
\frac{d\Omega}{dt}(t) = (J_M)^{-1} \left(-f_M \Omega(t) + \Gamma_B(\mathbf{X}(t)) + \Gamma_M\right) \\
\frac{d\theta}{dt}(t) = \Omega(t)
\end{cases} (9.66)$$

Afin de résoudre cette expression, on utilise un schéma d'Euler explicite pour la première et implicite pour la seconde. L'utilisation d'un schéma explicite est cohérente car le temps caractéristique de l'équation mécanique τ_M sur des applications électrotechniques est très grand comparé à celui du problème magnétique τ_B ($\tau_B << \tau_M$). Ainsi, le pas de discrétisation temporelle τ est choisi petit par rapport à τ_B et donc très inférieur à τ_M . Ainsi, l'erreur de discrétisation temporelle due à l'utilisation d'un schéma explicite sur l'équation mécanique est très faible. On écrit alors :

$$\frac{d\Omega}{dt}\left(t^{k}\right) = \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^{k} \simeq \frac{\Omega^{k+1} - \Omega^{k}}{\tau} \tag{9.67}$$

Bien que l'on pourrait pour ces mêmes raisons utiliser un schéma explicite sur la seconde équation, on lui préférera un schéma implicite car elle induit une erreur numérique plus faible pour une implémentation d'une complexité équivalente. Ainsi, on a :

$$\frac{d\theta}{dt}\left(t^{k}\right) = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^{k} \simeq \frac{\theta^{k} - \theta^{k-1}}{\tau} \tag{9.68}$$

On écrit alors la discrétisation de ces deux équations comme :

$$\begin{cases}
\Omega^{k} = \left(1 - \frac{\tau f_{M}}{J_{M}}\right) \Omega^{k-1} + \frac{\tau}{J_{M}} \left(\Gamma_{B} \left(\mathbf{X}^{k-1}\right) + \Gamma_{M}\right) \\
\theta^{k} = \theta^{k-1} + \tau \Omega^{k}
\end{cases}$$
(9.69)

9.7.2.3 Problème générique discrétisé en temps

Finalement, le problème générique discrétisé en temps s'écrit :

Trouver $\mathbf{X}^{k}\left(t\right) \in \mathbb{R}^{N}$ tel que :

$$\left(\frac{\mathbf{K}}{\tau} + \mathbf{M}_{\theta}(\theta) + \mathbf{M}(\mathbf{X}^{k})\right) \mathbf{X}^{k} = \mathbf{C} \mathbf{U}^{k} + \frac{\mathbf{K}}{\tau} \mathbf{X}^{k-1}, \ k = 1, ..., N^{t}$$
(9.70)

et trouver $(\theta^{k+1}, \Omega^{k+1}) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\begin{cases}
\Omega^{k+1} = \left(1 - \frac{\tau f_M}{J_M}\right) \Omega^k + \frac{\tau}{J_M} \left(\Gamma_B \left(\mathbf{X}^k\right) + \Gamma_M\right) \\
\theta^{k+1} = \theta^k + \tau \Omega^{k+1}
\end{cases}, k = 0, ..., N_t - 1$$
(9.71)

Remarque 9.7.1 Afin d'expliciter le chaînage des deux modèles, l'équation mécanique a été écrite au pas de temps k+1. En effet, en connaissant θ^k , l'équation 9.70 permet de calculer \mathbf{X}^k . Or en connaissant \mathbf{X}^k , le jeu d'équations mécaniques 9.71 permet de calculer θ^{k+1} permettant alors d'obtenir \mathbf{X}^{k+1} et ainsi de suite.

Troisième partie Construction du système matriciel

Chapitre 10

Mise en œuvre de la méthode des Éléments finis dans code_Carmel

On trouvera dans [Nédélec 1992] ou [Henneron 2004] et au chapitre 2 de [Girault 2006] une description des éléments finis mixtes a utiliser pour discrétiser les formulations variationnelles $\mathbf{A} - \phi$ et $\mathbf{T} - \Omega$. Dans code_Carmel, on utilise des éléments finis :

- scalaires de classe H_{qrad} (éléments finis nodaux);
- vectoriels de classe \mathbf{H}_{rot} (éléments finis d'arêtes ou éléments finis de Nédélec);
- vectoriels de classe \mathbf{H}_{div} (éléments finis de facette ou éléments finis de Raviart-Thomas).

Ces éléments ont été interprétés géométriquement sous la forme d'éléments de Whitney par Alain Bossavit et on renvoie à [Bossavit, Vérité 1983] pour une présentation détaillée de cet aspect. Ici on suit [Girault 2006].

10.1 Éléments finis employés

Un élément fini est défini par la donnée de :

- un élément géométrique K : dans code_Carmel, l'élément géométrique appartient à \mathbb{R}^3 et peut être un tétraèdre (T), un prisme (P) ou un hexaèdre (H);
- un espace vectoriel de dimension N de fonctions scalaires ou vectorielles définies sur K noté P_K . Dans code_Carmel, les espaces d'approximation sont des espaces de polynômes, soit scalaires soit vectoriels. On appelle fonctions de base une base de l'espace d'approximation;
- un ensemble de N formes linéaires sur l'espace des fonctions scalaires ou vectorielles définies sur K: les degrés de liberté.

Pour chaque élément géométrique, on définit l'élément fini de plus bas degré de classe \mathbf{H}_{rot} et l'élément fini de plus bas degré de classe \mathbf{H}_{div} .

Pour chaque élément géométrique, on introduit un représentant particulier : l'élément de référence $(\hat{T},\hat{P}\text{ ou }\hat{H})$. Les fonctions de base définies sur cet élément serviront par transformation affine à construire les fonctions de base de n'importe quel élément de la triangulation. On appelle (u,v,w) les coordonnées dans un repère orthonormé.

10.2 Éléments de référence et fonctions de forme utilisées

10.2.1 Cas du tétraèdre

L'élément géométrique T est un tétraèdre défini par ses 4 sommets $(s^i)_{i=1,4}$. Il y a 6 arêtes $(a^i)_{i=1,6}$ et 4 facettes $(f^i)_{i=1,4}$.

Le tétraèdre de référence \widehat{T} est le tétraèdre de sommets :

$$s^1 = (0, 0, 0), s^2 = (1, 0, 0), s^3 = (0, 1, 0), s^4 = (0, 0, 1).$$

La numérotation des nœuds, arêtes et facettes de \hat{T} est montrée sur la figure 10.1.

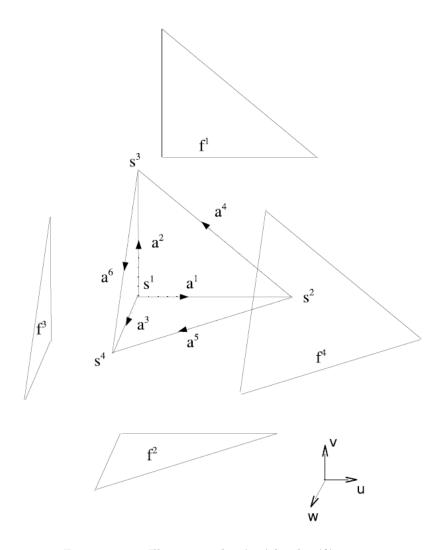


Figure 10.1 – Illustration du tétraèdre de référence

10.2.1.1 Élément fini P_1 de classe H^1

L'espace d'approximation P_T est l'espace P_1 des polynômes de 3 variables réelles, à valeur réelle :

$$P_T = P_1 = \{p, p(\mathbf{x}) = c_o + \mathbf{c_1}.\mathbf{x}, c_o \in \mathbb{R}, \mathbf{c_1} \in \mathbb{R}^3\}$$

Cet espace est de dimension 4.

Les degrés de liberté sont les valeurs aux sommets du tétraèdre, d'où la dénomination d'éléments finis nodaux :

$$\Sigma_T = \left\{ \sigma_i / \sigma_i(f) = f(s^i), i = 1, 4 \right\}$$

et les fonctions de base sont les coordonnées barycentriques $(\lambda_i)i = 1,4$ définies en tout point x par :

$$\sum_{j=1}^{4} s^{j} \lambda_{j}(x) = x, \sum_{j=1}^{4} \lambda_{j}(x) = 1$$

On note w_n^0 la fonction de base associée au sommet n, c'est-à-dire $w_n^0 = \lambda_n$.

Pour le tétraèdre de référence, les fonctions de base ont l'expression suivante :

$$\begin{array}{rcl} w_1^0(u,v,w) & = & 1-u-v-w \\ w_2^0(u,v,w) & = & u \\ w_3^0(u,v,w) & = & v \\ w_4^0(u,v,w) & = & w \end{array} \tag{10.1}$$

10.2.1.2 Élément fini de classe H_{rot}

L'espace d'approximation \mathbf{P}_T est inclus dans l'espace \mathbf{P}_1 des polynômes de 3 variables réelles, à valeur dans \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{P}_1 = (P_1)^3$$

Plus précisément, \mathbf{P}_T est l'espace de dimension 6 défini par :

$$\mathbf{P}_T = \left\{ \mathbf{p} \in (P_1)^3, \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{c_0} + \mathbf{c_1} \land \mathbf{x}, \mathbf{c_0}, \mathbf{c_1} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Les degrés de liberté sont les circulations sur les arêtes de T:

$$\Sigma_T = \left\{ \sigma_i / \sigma_i(\mathbf{f}) = \int_{\sigma_i} \mathbf{f} \, ds, i = 1, 4 \right\}$$

Notons T le volume signé du tétraèdre. On a :

$$T = \frac{1}{6}(\mathbf{a_1} \wedge \mathbf{a_2}).\mathbf{a^3}$$

Remarque 10.2.1 Pour un tétraèdre orienté comme le tétraèdre de référence, le produit mixte $(\mathbf{a_1} \wedge \mathbf{a_2}).\mathbf{a^3}$ est positif.

On appelle w_i^1 la fonction de base associée à l'arête i. On a [Nédélec 1992] :

$$w_{1}^{1}(x) = \frac{a^{6} \wedge (x - s^{3})}{6T} , \quad w_{2}^{1}(x) = -\frac{a^{5} \wedge (x - s^{2})}{6T}$$

$$w_{3}^{1}(x) = \frac{a^{4} \wedge (x - s^{2})}{6T} , \quad w_{4}^{1}(x) = \frac{a^{3} \wedge (x - s^{1})}{6T}$$

$$w_{5}^{1}(x) = -\frac{a^{2} \wedge (x - s^{1})}{6T} , \quad w_{6}^{1}(x) = \frac{a^{1} \wedge (x - s^{1})}{6T}$$

$$(10.2)$$

Une autre expression de la fonction de base relative à l'arête reliant s^i et s^j est :

$$\lambda_i.\operatorname{grad}(\lambda_i) - \lambda_i.\operatorname{grad}(\lambda_i)$$
 (10.3)

On obtient les fonctions de base pour le tétraèdre de référence \widehat{T} à partir de 10.3 :

$$w_{1}^{1}(u, v, w) = \begin{pmatrix} 1 - v - w \\ u \\ u \end{pmatrix} \quad w_{2}^{1}(u, v, w) = \begin{pmatrix} v \\ 1 - v - w \\ v \end{pmatrix}$$

$$w_{3}^{1}(u, v, w) = \begin{pmatrix} w \\ w \\ 1 - v - w \end{pmatrix} \quad w_{4}^{1}(u, v, w) = \begin{pmatrix} -v \\ u \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_{5}^{1}(u, v, w) = \begin{pmatrix} -w \\ 0 \\ u \end{pmatrix} \qquad w_{6}^{1}(u, v, w) = \begin{pmatrix} 0 \\ -w \\ v \end{pmatrix}$$

$$(10.4)$$

Les rotationnels des fonctions de base $(\mathbf{w}_i^1)_{i=1,6}$ sont constants dans chaque tétraèdre. Dans le tétraèdre de référence, ils sont donnés par :

$$\mathbf{rot}(w_{1}^{1})(u, v, w) = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{rot}(w_{2}^{1})(u, v, w) = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{rot}(w_{3}^{1})(u, v, w) = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{rot}(w_{4}^{1})(u, v, w) = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{rot}(w_{5}^{1})(u, v, w) = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{rot}(w_{6}^{1})(u, v, w) = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(10.5)$$

10.2.1.3 Élément fini de classe H_{div}

L'espace d'approximation $\mathbf{P_T}$ est un sous-espace de dimension 4 de l'espace $\mathbf{P_1}$.

$$\mathbf{P}_T = \left\{ \mathbf{p} \in P_1, \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{c_0} + c_1 \, \mathbf{x}, \mathbf{c_0} \in \mathbb{R}^3, c_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

Les degrés de liberté sont les flux à travers les facettes f_i de T :

$$\Sigma_T = \left\{ \sigma_i / \sigma_i(\mathbf{g}) = \int_{f_i} (\mathbf{g}.\mathbf{n} \, ds), i = 1, 4 \right\}$$

Les fonctions de base associées aux faces du tétraèdre sont données par :

$$w_1^2(u, v, w) = \frac{s^4 - x}{3|T|} \quad w_2^2(u, v, w) = \frac{s^3 - x}{3|T|}$$

$$w_3^2(u, v, w) = \frac{s^2 - x}{3|T|} \quad w_4^2(u, v, w) = \frac{s^1 - x}{3|T|}$$
(10.6)

Dans code_Carmel , on part de la formule générale pour la fonction de base relative à la face i,j,k ([Geuzaine 2001] p.41)

$$2(w_i^0 \operatorname{grad} w_i^0 \wedge \operatorname{grad} w_k^0 + w_i^0 \operatorname{grad} w_k^0 \wedge \operatorname{grad} w_i^0 + w_k^0 \operatorname{grad} w_i^0 \wedge \operatorname{grad} w_i^0)$$

On a donc les expressions suivantes des fonctions de base relatives aux facettes du tétraèdre \widehat{T} :

$$\begin{array}{lcl} w_1^2(u,v,w) & = & 2\left(w_1^0\operatorname{grad}w_2^0 \wedge \operatorname{grad}w_3^0 + w_2^0\operatorname{grad}w_3^0 \wedge \operatorname{grad}w_1^0 \right. \\ & & & + w_3^0\operatorname{grad}w_3^0 \wedge \operatorname{grad}w_2^0\right) \\ w_2^2(u,v,w) & = & 2\left(w_1^0\operatorname{grad}w_2^0 \wedge \operatorname{grad}w_4^0 + w_2^0\operatorname{grad}w_4^0 \wedge \operatorname{grad}w_1^0 \right. \\ & & & + w_4^0\operatorname{grad}w_1^0 \wedge \operatorname{grad}w_2^0\right) \\ w_3^2(u,v,w) & = & 2\left(w_1^0\operatorname{grad}w_3^0 \wedge \operatorname{grad}w_4^0 + w_3^0\operatorname{grad}w_4^0 \wedge \operatorname{grad}w_1^0 \right. \\ & & & + w_4^0\operatorname{grad}w_1^0 \wedge \operatorname{grad}w_3^0\right) \\ w_4^2(u,v,w) & = & 2\left(w_2^0\operatorname{grad}w_3^0 \wedge \operatorname{grad}w_4^0 + w_3^0\operatorname{grad}w_4^0 \wedge \operatorname{grad}w_2^0 + w_4^0\operatorname{grad}w_2^0 \wedge \operatorname{grad}w_3^0\right) \end{array} \tag{10.7}$$

Remarque 10.2.2 D'après [Deliège 2003] (p. 183), on peut aussi utiliser directement l'expression des fonctions de base.

$$w_1^2(u, v, w) = 2 \begin{pmatrix} u \\ v \\ -1 + w \end{pmatrix}$$

$$w_2^2(u, v, w) = 2 \begin{pmatrix} u \\ -1 + v \\ w \end{pmatrix}$$

$$w_3^2(u, v, w) = 2 \begin{pmatrix} -1 + u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$w_4^2(u, v, w) = 2 \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$(10.8)$$

10.2.1.3.1 Cas du prisme

L'élément géométrique P est un prisme droit défini par ses 6 sommets $(s^i)_{i=1,6}$. Il y a 9 arêtes $(a^i)_{i=1,9}$ et 4 facettes $(f^i)_{i=1,5}$ (3 rectangulaires et 2 triangulaires).

Le prisme de référence \hat{P} est le prisme de sommets :

La numérotation des nœuds, arêtes et facettes de \hat{P} est montrée sur la figure 10.2.

Élément fini de classe H^1 On considère le prisme de référence : la face triangulaire est dans le plan (u, v). L'espace d'approximation P_P est un espace de dimension 6. C'est l'ensemble des polynômes de 3 variables réelles, de degré 1 en (u, v) et de degré 1 en w.

$$P_P = \{ p : (u, v, w) \mapsto p(u, v, w) = q(u, v) \, r(w), q \in P_1(u, v), r \in P_1(w) \}$$

Remarque 10.2.3 Cet espace est inclus dans celui des polynômes de degrés 2 (et non pas 1).

Les degrés de liberté sont les valeurs aux sommets du prisme :

$$\Sigma_P = \{ \sigma_i / \sigma_i(f) = f(s^i), i = 1, 6 \}$$

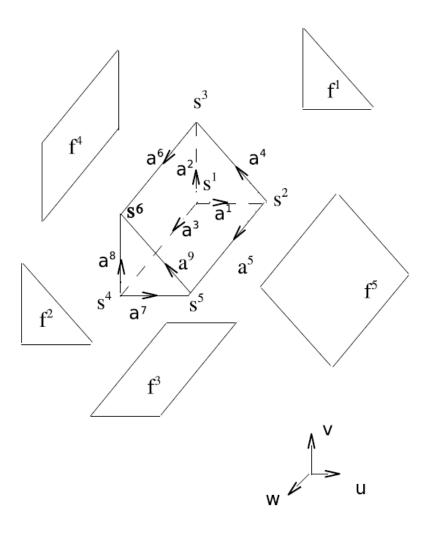


Figure 10.2 – Illustration du prisme de référence

Les fonctions de base w^0 pour le prisme de référence, sont données par :

$$w_1^0(u, v, w) = \frac{1}{2} (1 - u - v) (1 - w)$$

$$w_2^0(u, v, w) = \frac{1}{2} u (1 - w)$$

$$w_3^0(u, v, w) = \frac{1}{2} v (1 - w)$$

$$w_4^0(u, v, w) = \frac{1}{2} (1 - u - v) (1 + w)$$

$$w_5^0(u, v, w) = \frac{1}{2} u (1 + w)$$

$$w_6^0(u, v, w) = \frac{1}{2} v (1 + w)$$

Élément fini de classe \mathbf{H}_{rot} L'espace d'approximation \mathbf{P}_P est un sous-espace de \mathbf{P}_1 de dimension 9 :

$$\mathbf{P}_{P} = \left\{ \mathbf{p} : (u, v, w) \mapsto \mathbf{p}(u, v, w) = \begin{pmatrix} \alpha_{1} + \beta v + \gamma_{1} w + \delta v w \\ \alpha_{2} - \beta v + \gamma_{2} w - \delta u w \\ \alpha_{3} + \epsilon_{1} u + \epsilon_{2} v \end{pmatrix} \right\}$$

où : α_1 , α_2 , α_3 , β , γ_1 , γ_2 , δ , ϵ_1 , ϵ_2 sont des coefficients réels.

Les degrés de liberté sont les circulations sur les arêtes de ${\cal P}$:

$$\Sigma_T = \left\{ \sigma_i / \sigma_i(\mathbf{f}) = \int_{a^i} \mathbf{f} \, ds, i = 1, 9 \right\}$$

La fonction de base relative à l'arête joignant le nœud i et le nœud j est donnée par la formule ([Geuzaine 2001] p. 41) :

$$w_j^0 \operatorname{\mathbf{grad}} \sum_{r \in \mathcal{N}(j,\overline{i})} w_r^0 - w_i^0 \operatorname{\mathbf{grad}} \sum_{r \in \mathcal{N}(i,\overline{j})} w_r^0$$
 (10.10)

où $\mathcal{N}(m, \overline{n})$ désigne l'ensemble des nœuds de la face qui contient le nœud m et pas le nœud n.

Les fonctions de base associées aux arêtes du prisme de référence \widehat{P} sont :

$$w_{1}^{1}(u,v,w) = \frac{1}{2}(1-w)\begin{pmatrix} 1-v \\ u \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_{2}^{1}(u,v,w) = \frac{1}{2}(1-w)\begin{pmatrix} v \\ 1-u \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_{3}^{1}(u,v,w) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-u-v \end{pmatrix} \quad w_{4}^{1}(u,v,w) = \frac{1}{2}(1-w)\begin{pmatrix} -v \\ u \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_{5}^{1}(u,v,w) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix} \quad w_{6}^{1}(u,v,w) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (10.11)$$

$$w_{7}^{1}(u,v,w) = \frac{1}{2}(1+w)\begin{pmatrix} 1-v \\ 1-u \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_{8}^{1}(u,v,w) = \frac{1}{2}(1+w)\begin{pmatrix} v \\ 1-u \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_{9}^{1}(u,v,w) = \frac{1}{2}(1+w)\begin{pmatrix} -v \\ u \\ 0 \end{pmatrix}$$

Élément fini de classe \mathbf{H}_{div} La fonction de base relative à la facette f contenant les nœuds i, j, k (et l s'il s'agit d'une facette quadrangulaire) est obtenue en appliquant la formule générale ([Geuzaine 2001] p.41).

$$\mathbf{w}^2 = a \sum_{q \in \mathcal{N}(f)} w_q^0 \operatorname{\mathbf{grad}} \left(\sum_{r \in \mathcal{N}(q)(\overline{q+1})} w_r^0 \right) \wedge \operatorname{\mathbf{grad}} \left(\sum_{r \in \mathcal{N}(q)(\overline{q-1})} w_r^0 \right)$$
(10.12)

où a est égal à 2 si f est triangulaire et a vaut 1 si f est quadrangulaire.

Les fonctions de base relatives aux facettes du prisme de référence \widehat{T} sont :

$$\begin{array}{lcl} w_1^2(u,v,w) & = & 2 \left[w_1^0 \operatorname{\mathbf{grad}}(w_2^0 + w_5^0) \wedge \operatorname{\mathbf{grad}}(w_3^0 + w_6^0) \right. \\ & & + w_2^0 \operatorname{\mathbf{grad}}(w_3^0 + w_6^0) \wedge \operatorname{\mathbf{grad}}(w_1^0 + w_4^0) \\ & & + w_3^0 \operatorname{\mathbf{grad}}(w_1^0 + w_4^0) \wedge \operatorname{\mathbf{grad}}(w_2^0 + w_5^0) \right] \\ w_2^2(u,v,w) & = & 2 \left[w_4^0 \operatorname{\mathbf{grad}}(w_2^0 + w_5^0) \wedge \operatorname{\mathbf{grad}}(w_3^0 + w_6^0) \right. \\ & & + w_5^0 \operatorname{\mathbf{grad}}(w_3^0 + w_6^0) \wedge \operatorname{\mathbf{grad}}(w_1^0 + w_4^0) \\ & & + w_6^0 \operatorname{\mathbf{grad}}(w_1^0 + w_4^0) \wedge \operatorname{\mathbf{grad}}(w_2^0 + w_5^0) \right] \\ w_3^2(u,v,w) & = & w_1^0 \operatorname{\mathbf{grad}}(w_2^0 + w_5^0) \wedge \operatorname{\mathbf{grad}}(w_4^0 + w_5^0 + w_6^0) \\ & & + w_2^0 \operatorname{\mathbf{grad}}(w_4^0 + w_5^0 + w_6^0) \wedge \operatorname{\mathbf{grad}}(w_1^0 + w_4^0) \\ & & + w_4^0 \operatorname{\mathbf{grad}}(w_1^0 + w_2^0 + w_3^0) \wedge \operatorname{\mathbf{grad}}(w_2^0 + w_5^0) \\ & & + w_5^0 \operatorname{\mathbf{grad}}(w_1^0 + w_4^0) \wedge \operatorname{\mathbf{grad}}(w_1^0 + w_2^0 + w_3^0) \\ w_4^2(u,v,w) & = & w_2^0 \operatorname{\mathbf{grad}}(w_3^0 + w_6^0) \wedge \operatorname{\mathbf{grad}}(w_4^0 + w_5^0 + w_6^0) \\ & & + w_3^0 \operatorname{\mathbf{grad}}(w_4^0 + w_5^0 + w_6^0) \wedge \operatorname{\mathbf{grad}}(w_1^0 + w_4^0) \\ & & + w_5^0 \operatorname{\mathbf{grad}}(w_1^0 + w_2^0 + w_3^0) \wedge \operatorname{\mathbf{grad}}(w_1^0 + w_4^0) \\ & & + w_5^0 \operatorname{\mathbf{grad}}(w_1^0 + w_2^0 + w_3^0) \wedge \operatorname{\mathbf{grad}}(w_3^0 + w_6^0) \\ & & + w_6^0 \operatorname{\mathbf{grad}}(w_2^0 + w_5^0) \wedge \operatorname{\mathbf{grad}}(w_1^0 + w_2^0 + w_3^0) \end{array}$$

10.2.1.3.2 Cas de l'hexaèdre

L'élément géométrique H est un prisme droit défini par ses 8 sommets $(s^i)_{i=1,8}$. Il y a 12 arêtes $(a^i)_{i=1,12}$ et 6 facettes $(f^i)_{i=1,6}$.

L'hexaèdre de référence \widehat{P} est l'hexaèdre de sommets :

La numérotation des nœuds, arêtes et facettes de \hat{H} est montrée sur la figure 10.3.

Éléments finis Q_1 de classe H^1 L'espace d'approximation P_H est l'espace des polynômes de degré 1 en chacune des variables u, v, w. C'est un espace de dimension 8.

$$P_H = Q_1 = \{ p : (u, v, w) \mapsto p(u, v, w) = q(u) \, r(v) \, s(w), q \in P_1(u), r \in P_1(v), s \in P_1(w) \}$$

Les degrés de liberté sont les valeurs aux sommets de l'hexaèdre :

$$\Sigma_H = \{ \sigma_i / \sigma_i(f) = f(s^i), i = 1, 8 \}$$

Les fonctions de base w^0 pour l'hexaèdre de référence \widehat{H} , sont données par :

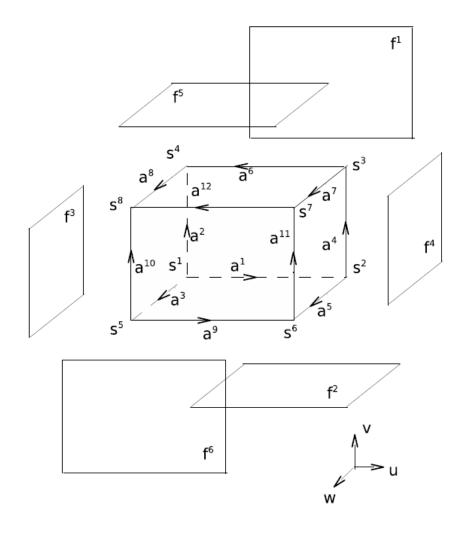


Figure 10.3 – Illustration de l'hexaèdre de référence

$$w_1^0(u, v, w) = \frac{1}{8} (1 - u) (1 - v) (1 - w)$$

$$w_2^0(u, v, w) = \frac{1}{8} (1 + u) (1 - v) (1 - w)$$

$$w_3^0(u, v, w) = \frac{1}{8} (1 + u) (1 + v) (1 - w)$$

$$w_4^0(u, v, w) = \frac{1}{8} (1 - u) (1 + v) (1 - w)$$

$$w_5^0(u, v, w) = \frac{1}{8} (1 - u) (1 - v) (1 + w)$$

$$w_6^0(u, v, w) = \frac{1}{8} (1 + u) (1 - v) (1 + w)$$

$$w_7^0(u, v, w) = \frac{1}{8} (1 + u) (1 + v) (1 + w)$$

$$w_8^0(u, v, w) = \frac{1}{8} (1 - u) (1 + v) (1 + w)$$

Élément fini de classe \mathbf{H}_{rot} L'espace d'approximation \mathbf{P}_H est un sous-espace de polynômes de degré 2 de dimension 12 :

$$\mathbf{P}_{P} = \left\{ \mathbf{p} : (u, v, w) \mapsto \mathbf{p}(u, v, w) = \begin{pmatrix} \alpha_{1} + \beta_{1} v + \gamma_{1} w + \delta_{1} v w \\ \alpha_{2} + \beta_{2} u + \gamma_{2} w + \delta_{2} u w \\ \alpha_{3} + \beta_{3} u + \gamma_{3} v + \delta_{3} u v \end{pmatrix} \right\}$$

où : α_1 , α_2 , α_3 , β_1 , β_2 , β_3 , γ_1 , γ_2 , γ_3 , δ_1 , δ_2 , δ_3 sont des coefficients réels.

Les degrés de liberté sont les circulations sur les arêtes de H:

$$\Sigma_P = \left\{ \sigma_i / \sigma_i(\mathbf{f}) = \int_{a^i} \mathbf{f} \, ds, i = 1, 12 \right\}$$

Les fonctions de base associées aux arêtes de l'hexaèdre de référence \widehat{H} sont calculées à partir de 10.10:

$$w_{1}^{1}(u,v,w) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} (1-v)(1-w) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_{2}^{1}(u,v,w) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} (1-u)(1-w) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_{3}^{1}(u,v,w) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (1-u)(1-v) \end{pmatrix} \quad w_{4}^{1}(u,v,w) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} (1+u)(1-w) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_{5}^{1}(u,v,w) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (1+u)(1-v) \end{pmatrix} \quad w_{6}^{1}(u,v,w) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} (1+v)(1+w) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_{7}^{1}(u,v,w) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (1-u)(1+v) \end{pmatrix} \quad w_{8}^{1}(u,v,w) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (1+u)(1+v) \end{pmatrix}$$

$$w_{9}^{1}(u,v,w) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} (1-v)(1+w) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_{10}^{1}(u,v,w) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} (1-v)(1+w) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_{11}^{1}(u,v,w) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} (1-v)(1+w) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_{12}^{1}(u,v,w) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} (1+v)(1+w) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(10.15)$$

Élément fini de classe \mathbf{H}_{div} Les fonctions de base relatives aux facettes du prisme de référence \hat{T} sont obtenues en appliquant la formule générale 10.12:

$$\begin{aligned} w_1^2(u,v,w) &= & w_0^0 \operatorname{grad}(w_1^0 + + w_4^0 + w_5^0 + w_6^0) \wedge \operatorname{grad}(w_1^0 + + w_2^0 + w_5^0 + w_6^0) \\ &+ w_0^0 \operatorname{grad}(w_1^0 + + w_2^0 + w_5^0 + w_6^0) \wedge \operatorname{grad}(w_2^0 + w_3^0 + w_6^0 + w_7^0) \\ &+ w_0^0 \operatorname{grad}(w_2^0 + w_3^0 + w_6^0 + w_7^0) \wedge \operatorname{grad}(w_3^0 + w_4^0 + w_7^0 + w_8^0) \\ &+ w_4^0 \operatorname{grad}(w_3^0 + w_4^0 + w_7^0 + w_8^0) \wedge \operatorname{grad}(w_1^0 + w_4^0 + w_5^0 + w_8^0) \\ &+ w_4^0 \operatorname{grad}(w_3^0 + w_4^0 + w_7^0 + w_8^0) \wedge \operatorname{grad}(w_1^0 + w_2^0 + w_3^0 + w_4^0) \\ &+ w_2^0 \operatorname{grad}(w_1^0 + w_2^0 + w_3^0 + w_4^0) \wedge \operatorname{grad}(w_2^0 + w_3^0 + w_6^0 + w_7^0) \\ &+ w_5^0 \operatorname{grad}(w_1^0 + w_2^0 + w_3^0 + w_4^0) \wedge \operatorname{grad}(w_2^0 + w_3^0 + w_6^0 + w_7^0) \\ &+ w_5^0 \operatorname{grad}(w_2^0 + w_3^0 + w_6^0 + w_7^0) \wedge \operatorname{grad}(w_2^0 + w_3^0 + w_6^0 + w_7^0) \\ &+ w_6^0 \operatorname{grad}(w_2^0 + w_3^0 + w_6^0 + w_7^0) \wedge \operatorname{grad}(w_1^0 + w_2^0 + w_3^0 + w_4^0) \\ &+ w_6^0 \operatorname{grad}(w_2^0 + w_3^0 + w_6^0 + w_7^0) \wedge \operatorname{grad}(w_1^0 + w_2^0 + w_3^0 + w_4^0) \\ &+ w_4^0 \operatorname{grad}(w_1^0 + w_2^0 + w_3^0 + w_4^0) \wedge \operatorname{grad}(w_1^0 + w_2^0 + w_3^0 + w_4^0) \\ &+ w_4^0 \operatorname{grad}(w_1^0 + w_2^0 + w_3^0 + w_4^0) \wedge \operatorname{grad}(w_1^0 + w_2^0 + w_3^0 + w_4^0) \\ &+ w_5^0 \operatorname{grad}(w_3^0 + w_4^0 + w_7^0 + w_8^0) \wedge \operatorname{grad}(w_1^0 + w_2^0 + w_3^0 + w_4^0) \\ &+ w_6^0 \operatorname{grad}(w_3^0 + w_4^0 + w_7^0 + w_8^0) \wedge \operatorname{grad}(w_1^0 + w_2^0 + w_3^0 + w_4^0) \\ &+ w_4^0 \operatorname{grad}(w_1^0 + w_2^0 + w_3^0 + w_4^0) \wedge \operatorname{grad}(w_1^0 + w_2^0 + w_3^0 + w_4^0) \\ &+ w_3^0 \operatorname{grad}(w_1^0 + w_2^0 + w_3^0 + w_4^0) \wedge \operatorname{grad}(w_1^0 + w_2^0 + w_3^0 + w_4^0) \\ &+ w_6^0 \operatorname{grad}(w_3^0 + w_4^0 + w_7^0 + w_8^0) \wedge \operatorname{grad}(w_1^0 + w_2^0 + w_3^0 + w_4^0) \\ &+ w_1^0 \operatorname{grad}(w_1^0 + w_2^0 + w_3^0 + w_4^0) \wedge \operatorname{grad}(w_1^0 + w_2^0 + w_3^0 + w_4^0) \\ &+ w_1^0 \operatorname{grad}(w_1^0 + w_2^0 + w_3^0 + w_4^0) \wedge \operatorname{grad}(w_1^0 + w_2^0 + w_3^0 + w_4^0) \\ &+ w_1^0 \operatorname{grad}(w_1^0 + w_2^0 + w_3^0 + w_3^0) \wedge \operatorname{grad}(w_1^0 + w_2^0 + w_3^0 + w_4^0) \\ &+ w_1^0 \operatorname{grad}(w_1^0 + w_2^0 + w_3^0 + w_3^0) \wedge \operatorname{grad}(w_1^0 + w_2^0 + w_3^0 + w_4^0) \\ &+ w_1^0 \operatorname{grad}(w_1^0 + w_2^0 + w_3^0 + w_3^0) \wedge \operatorname{grad}(w_1^0 + w_2^0 + w_3^0 + w_4^0) \\ &+ w_1^0 \operatorname{grad}(w$$

10.2.2 Cas de la pyramide

À la différence du prisme, de l'hexaèdre ou du tétraèdre, la pyramide est un élément un peu plus retord du fait de sa connexité particulière : contrairement aux 3 éléments classiques où chaque nœud est connecté à 3 arêtes, le sommet de la pyramide est lié à 4 arêtes. Il en résulte des fonctions de formes moins régulières.

L'élément pyramidal ainsi que les fonctions de formes associées sont issues de l'excellent article de Gradinaru et Hiptmair [Gradinaru 1999] (qui comporte cependant une erreur pour les fonctions d'arête 6 et 7), où les fonctions de formes sont déterminées en découpant la pyramide en deux tétraèdres. On peut également trouver leur expression à partir des formules Whitney. Il est à noter que les fonctions de facette diffèrent alors dans les deux cas, ce que nous examinerons de plus près. Dans les autres versions de Carmel où les pyramides ont été implémentées, ce sont les fonctions de l'article de Hiptmair qui ont été utilisées.

La pyramide de référence est présentée sur la figure 10.4. La numérotation un peu particulière est due à l'intégration dans code_Carmel (nous y reviendrons par la suite). Ainsi, la base carrée est numérotée "en sablier" afin de se rapprocher de la numérotation des hexaèdres. Les arêtes sont

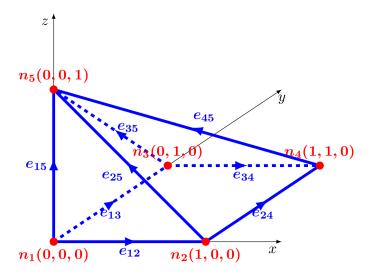


Figure 10.4 – Pyramide de référence

définies dans le sens d'indice croissant : e_{ij} où i < j, et sont orientées du nœud n_i vers n_j .

Les faces sont elles aussi nommées dans le sens d'indice croissant : f_{ijk} avec i < j < k et f_{1234} pour la base carrée. Afin de simplifier le problème, nous considérerons que les faces sont toutes orientées vers l'extérieur dans un premier temps. Nous verrons ensuite comment les ajuster ensuite en fonction de l'orientation un peu particulière dans Carmel. La figure 10.5 présente la définition des 5 faces de l'élément de référence.

Nous allons maintenant présenter les fonctions de forme utilisées.

10.2.2.1 Fonctions de formes nodales

Les fonctions nodales sont utilisées pour discrétiser les éléments appartenant à $(H^1(\Omega))^3$. La fonction nodale associée à un nœud vaut 1 sur celui-ci, et 0 sur tous les autres :

$$\int_{\{n_j\}} w_i^n \cdot \delta_{n_j} = \delta_i^j \tag{10.17}$$

où δ_{n_j} est la distribution de Dirac associée au noeud j, et δ_i^j , le symbole de Kronecker. Les 5 fonctions nodales sont les suivantes :

$$w_1^n(x, y, z) = \frac{(1 - x - z)(1 - y - z)}{1 - z};$$
 $w_2^n(x, y, z) = \frac{x(1 - y - z)}{1 - z};$
 $w_3^n(x, y, z) = \frac{(1 - x - z)y}{1 - z};$
 $w_4^n(x, y, z) = \frac{xy}{1 - z};$
 $w_5^n(x, y, z) = z;$

Le lecteur pourra vérifier qu'elles forment bien une partition de l'unité sur l'élément.

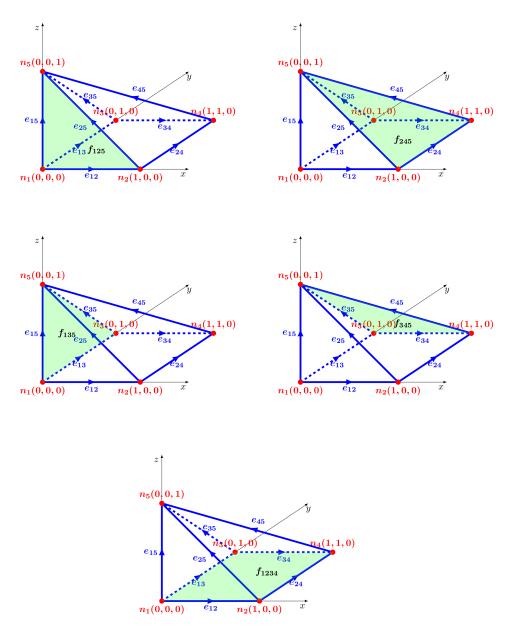


Figure 10.5 – Pyramide de référence

10.2.2.2 Fonctions de formes d'arête

Les fonctions "d'arête" sont utilisées pour discrétiser les éléments appartenant à $H(rot, \Omega)$. Ces fonctions sont dites d'arête car leur circulation est égale à 1 sur l'arête à laquelle elles sont associées, et 0 sinon. Elles vérifient ainsi la propriété suivante :

$$\int_{e_j} \boldsymbol{w}_i^e \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{l} = \delta_{ij} \tag{10.18}$$

Leur expression est détaillée dans l'article de référence (avec cependant une erreur pour la composante selon z sur la 6^{eme} et la 7^{eme}). On peut également les déterminer avec la formule de Whitney suivante [Geuzaine 2001]. Ainsi, pour la fonction associée à l'arête \boldsymbol{w}_{ij}^{e} , orientée de i vers

j, on a:

$$\boldsymbol{w}_{ij}^{e} = w_{j}^{n} \sum_{r \in \mathcal{N}(j,\bar{i})} \nabla w_{r} - w_{i}^{n} \sum_{r \in \mathcal{N}(i,\bar{j})} \nabla w_{r}$$

$$(10.19)$$

où $\mathcal{N}(i,\bar{j})$ désigne les nœuds appartenant aux faces qui contiennent le nœud i, mais pas le nœud j. Par exemple, l'ensemble $\mathcal{N}(1,\bar{2})$ représente les nœuds appartenant à la facette f_{135} , et on a donc $\mathcal{N}(1,\bar{2})=\{1,3,5\}$. On aura par contre $\mathcal{N}(5,\bar{1})$ qui constitue les indices de nœuds appartenant aux facettes f_{245} et f_{345} , d'où $\mathcal{N}(5,\bar{1})=\{2,3,4,5\}$. Finalement, les expressions des fonctions d'arête sont les suivantes :

$$\boldsymbol{w}_{12}^{e} = \begin{pmatrix} 1 - z - y \\ 0 \\ x - \frac{xy}{1 - z} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_{13}^{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - z - x \\ y - \frac{xy}{1 - z} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_{24}^{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ \frac{xy}{1 - z} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_{34}^{e} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ \frac{xy}{1 - z} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{w}_{15}^{e} = \begin{pmatrix} z - \frac{yz}{1 - z} \\ z - \frac{xz}{1 - z} \\ 1 - x - y + \frac{xy}{1 - z} - \frac{xyz}{(1 - z)^{2}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_{25}^{e} = \begin{pmatrix} -z + \frac{yz}{1 - z} \\ \frac{xz}{1 - z} \\ x - \frac{xy}{1 - z} + \frac{xyz}{(1 - z)^{2}} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{w}_{35}^{e} = \begin{pmatrix} \frac{yz}{1 - z} \\ -z + \frac{xz}{1 - z} \\ -z + \frac{xz}{1 - z} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_{45}^{e} = \begin{pmatrix} -\frac{yz}{1 - z} \\ -\frac{xz}{1 - z} \\ -\frac{xz}{1 - z} \end{pmatrix}$$

10.2.2.3 Fonctions de formes de facette

Les fonctions de formes associées aux facettes sont utilisées pour discrétiser les éléments de $H(div, \Omega)$. Leur flux est unitaire sur la facette à laquelle elles sont associées, et est nul sinon. Elles vérifient ainsi la relation suivante :

$$\int_{f_i} \boldsymbol{w}_i^f \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{n} = \delta_{ij} \tag{10.20}$$

Cette fois-ci, l'expression issue de la méthode développée par Hiptmair est différente de celle issue des formules de Whitney. Les deux semblent pourtant admissibles. Dans les deux cas, les fonctions de facette sont définies de telle sorte que leur normale soit dirigée vers l'extérieur de l'élément. Lors de l'implémentation dans code_Carmel, il faudra veiller à modifier leur sens en fonction de l'orientation définie dans la structure de données.

10.2.2.3.1 Approche Hiptmair

Les fonctions de facette présentées par Hiptmair sont les suivantes :

$$m{w}_{125}^f = egin{pmatrix} -rac{xz}{1-z} \\ -2+y+rac{z}{1-z} \\ z \end{pmatrix}, \qquad m{w}_{135}^f = egin{pmatrix} -2+x+rac{x}{1-z} \\ -rac{yz}{1-z} \\ z \end{pmatrix}$$
 $m{w}_{245}^f = egin{pmatrix} x+rac{x}{1-z} \\ -rac{yz}{1-z} \\ -rac{yz}{1-z} \\ z \end{pmatrix}, \qquad m{w}_{345}^f = egin{pmatrix} -rac{xz}{1-z} \\ y+rac{y}{1-z} \\ z \end{pmatrix}, \qquad m{w}_{1234}^f = egin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$

10.2.2.3.2 Approche Whitney

A la manière des éléments d'arête, les fonctions de facette peuvent être déterminées à partir des fonctions nodales. Ainsi, pour la facette \mathcal{F} constitué des nœuds $\{i, j, k\}$ ou $\{i, j, k, l\}$, on a :

$$\boldsymbol{w}_{\mathcal{F}}^{f} = a \sum_{q \in \mathcal{N}(\mathcal{F})} w_{q}^{n} \left(\sum_{r \in \mathcal{N}(\mathcal{F}, q, \overline{q+1})} \nabla w_{r} \right) \times \left(\sum_{r \in \mathcal{N}(\mathcal{F}, q, \overline{q-1})} \nabla w_{r} \right)$$
(10.21)

a est ici un coefficient numérique égal à 2 si la facette contient 3 nœuds, et 1 si elle en contient 4. $\mathcal{N}(\mathcal{F},q,\overline{q+1})$ désigne les nœuds appartenant aux faces qui contiennent le q^{eme} nœud de la facette \mathcal{F} , mais pas le $(q+1)^{eme}$ (où q+1 désigne l'indice cyclique suivant). Par exemple, pour la facette f_{125} composé des nœuds $\{1,2,5\}$, on aura à calculer les 3×2 quantités suivantes, où q parcourra les éléments de f_{125} (la colonne de gauche correspond aux termes $\mathcal{N}(f_{125},q,\overline{q+1})$ tandis que celle de droite représente les $\mathcal{N}(f_{125},q,\overline{q-1})$):

$$\mathcal{N}(f_{125}, 1, \overline{2}) = \{1, 3, 5\}, \qquad \mathcal{N}(f_{125}, 1, \overline{5}) = \{1, 2, 3, 4\}, \qquad \text{avec q=1}$$

$$\mathcal{N}(f_{125}, 2, \overline{5}) = \{1, 2, 3, 4\}, \qquad \mathcal{N}(f_{125}, 2, \overline{1}) = \{2, 4, 5\}, \qquad \text{avec q=2}$$

$$\mathcal{N}(f_{125}, 5, \overline{1}) = \{2, 3, 4, 5\}, \qquad \mathcal{N}(f_{125}, 5, \overline{2}) = \{1, 3, 4, 5\}, \qquad \text{avec q=5}$$

Les fonctions de forme obtenues sont les suivantes :

$$\boldsymbol{w}_{125}^{f2} = \begin{pmatrix} \frac{2xz(z+y-1)}{(1-z)^2} \\ \frac{2(z+y-1)}{1-z} \\ -\frac{2z(z+y-1)}{1-z} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{w}_{135}^{f2} = \begin{pmatrix} \frac{2(z+x-1)}{1-z} \\ \frac{2yz(z+x-1)}{(1-z)^2} \\ -\frac{2z(z+x-1)}{1-z} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{w}_{245}^{f2} = \begin{pmatrix} 2x \\ -\frac{2xyz}{(1-z)^2} \\ \frac{2yz}{1-z} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{w}_{345}^{f2} = \begin{pmatrix} -\frac{2xyz}{(1-z)^2} \\ 2y \\ \frac{2yz}{1-z} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{w}_{1234}^{f2} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$$

10.2.2.3.3 Comparaison des deux types de fonctions

Bien qu'ayant une forme différente, les deux types de fonctions sont admissibles, c'est à dire qu'elles vérifient bien la relation (10.20). Les fonctions de forme issues du formalisme de Whitney s'annulent sur la facette opposée tandis que celle issues de l'article de Hiptmair changent leur orientation afin de rester admissibles.

Afin d'aborder la même approche que dans les autres versions de Carmel, nous utiliserons les fonctions développées dans l'article de référence. Par ailleurs, ces fonctions semblaient fournir de meilleurs résultats. Ceci est peut être dû au fait que les fonctions développées par Hiptmair sont plus régulières, et que l'erreur issue de l'intégration de Gauss est ainsi moindre.

10.2.3 Transformation de l'élément de référence à l'élément réel (Calcul d'intégrale)

La méthode de Gauss [Dhatt, Thouzot 1984] est une méthode d'intégration numérique très utilisée dans laquelle les paramètres sont déterminés de façon à intégrer exactement des polynômes.

Si l'on prend une fonction polynomiale $y(\xi)$, on remplace l'intégrale de cette fonction par une combinaison linéaire de ses r valeurs aux points d'intégration ξ_i :

$$\int_{-1}^{1} y(\xi) d\xi = w_1 y(\xi_1) + w_2 y(\xi_2) + \dots + w_i y(\xi_i) + \dots + w_r y(\xi_r)$$
 (10.22)

On cherche à déterminer les 2r coefficients $(w_i$ et $\xi_i)$ pour le polynôme suivant :

$$y(\xi) = a_1 + a_2 \xi + \dots + a_{2r} \xi^{2r-1}$$

Le lecteur peut suivre le développement de ce calcul à la page de 281 de [Dhatt, Thouzot 1984]. Il faut surtout retenir que les abscisses ξ_i sont aussi les racines du polynôme de Legendre d'ordre r:

$$P_r(\xi) = 0$$

défini par la formule de récurrence :

$$P_{0}(\xi) = 1 P_{1}(\xi) = \xi \dots \dots \dots \dots P_{k}(\xi) = \frac{2k-1}{k} \xi P_{k-1}(\xi) - \frac{k-1}{k} P_{k-2}(\xi); k = 2, 3, ..., r$$

$$P_{k}(\xi) = \frac{2k-1}{k} \xi P_{k-1}(\xi) - \frac{k-1}{k} P_{k-2}(\xi); k = 2, 3, ..., r$$

Les poids w_i s'écrivent :

$$w_i = \frac{2\left(4 - \xi_i^2\right)}{\left[r P_{r-1}(\xi)\right]^2}; \ i = 1, 2, ..., r$$
(10.24)

L'erreur d'intégration est de la forme :

$$e = \frac{2^{2r+1} (r!)^4}{(2r+1) [(2r)!]^3} \frac{d^{2r}y}{d\xi^{2r}}$$
 (10.25)

10.2.4 Calcul des intégrales élémentaires par la méthode de Gauss

10.2.4.1 Cas des triangles

Une méthode directe d'intégration consiste à écrire :

$$\int_{0}^{1} \int_{0}^{1-\xi} y(\xi, \eta) d\xi d\eta \simeq \sum_{i=1}^{r} w_{i} y(\xi_{i}, \eta_{i})$$
 (10.26)

Une interpolation d'ordre 4 à 6 points est utilisée dans un triangle de référence.

Les six points de Gauss sont les suivants :

$$\mathbf{p}_{1} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_{2} = \begin{pmatrix} 1 - 2a \\ a \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_{3} = \begin{pmatrix} a \\ 1 - 2a \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{p}_{4} = \begin{pmatrix} b \\ b \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_{5} = \begin{pmatrix} 1 - 2b \\ b \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_{6} = \begin{pmatrix} b \\ 1 - 2b \\ -1 \end{pmatrix}$$
 (10.27)

avec :

a = 0.445948490915965D0b = 0.091576213509771D0

Les deux poids utilisés sont w_1 pour p_1 , p_2 et p_3 , et, w_2 pour p_4 , p_5 et p_6 , avec :

 $w_1 = 0.111690794839005D0$ $w_2 = 0.054975871827661D0$

10.2.4.2 Cas des rectangles

Pour une intégration numérique à deux dimensions, on utilise dans chaque direction ξ et η une intégration numérique à une dimension. La méthode "produit" s'exprime :

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} y(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} w_i w_j y(\xi_i, \eta_j)$$
(10.28)

où:

— w_i, w_j sont les coefficients de la méthode d'intégration;

 ξ_i , η_j sont les coordonnées des points d'intégration correspondants.

Les points de Gauss sont définis pour une interpolation d'ordre 5 à 7 points dans un rectangle de référence.

Les 7 points de Gauss utilisés sont les suivants.

$$\mathbf{p}_{1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0, 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0, 5 \\ a \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_{3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0, 5 \\ -a \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_{4} = \begin{pmatrix} \frac{b}{2} + 0, 5 \\ \frac{b}{2} + 0, 5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{p}_{5} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b}{2} + 0, 5 \\ -b \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_{6} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{b}{2} + 0, 5 \\ b \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_{7} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{b}{2} + 0, 5 \\ -b \end{pmatrix} (10.29)$$

avec:

$$a = \sqrt{\frac{14}{15}}$$
$$b = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

Les trois poids utilisés sont p pour p_1 , q pour p_2 , p_3 , r pour p_4 , p_5 , p_6 , p_7 , avec :

$$p = \frac{8}{7}$$

$$q = \frac{20}{63}$$

$$r = \frac{20}{36}$$

10.2.4.3 Cas des tétraèdres

La formule directe d'intégration sur un tétraèdre est donnée par :

$$\int_{0}^{1} \int_{0}^{1-\xi} \int_{0}^{1-\xi-\eta} y(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^{r} w_{i} y(\xi_{i}, \eta_{i}, \zeta_{i})$$
(10.30)

Trois cas de figures sont possibles.

Dans un premier cas, on peut définir ici des points de Gauss pour une interpolation d'ordre 3 à 5 points dans un tétraèdre de référence.

Les 5 points de Gauss utilisés sont les suivants :

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} b \\ b \\ b \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} b \\ b \\ c \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_4 = \begin{pmatrix} b \\ c \\ b \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_5 = \begin{pmatrix} c \\ b \\ b \end{pmatrix}$$
(10.31)

avec

$$a = \frac{1}{4}$$

$$b = \frac{1}{6}$$

$$c = \frac{1}{2}$$

Les trois poids utilisés sont p pour $\boldsymbol{p}_1,$ et q pour $\boldsymbol{p}_2,\,\boldsymbol{p}_3,\,\boldsymbol{p}_4,\,\boldsymbol{p}_5,$ avec :

$$p = -\frac{2}{15}$$

$$q = \frac{3}{40}$$

Dans un second cas, on peut définir ici des points de Gauss pour une interpolation d'ordre 2 à 4 points dans un tétraèdre de référence.

Les 4 points de Gauss utilisés sont les suivants :

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} \ \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_4 = \begin{pmatrix} b \\ a \\ a \end{pmatrix}$$
 (10.32)

avec

$$a = \frac{5 - \sqrt{5}}{20}$$

$$b = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{20}$$

Les quatre poids utilisés sont p pour $\boldsymbol{p}_1,\,\boldsymbol{p}_2,\,\boldsymbol{p}_3,\,\boldsymbol{p}_4,$ avec :

$$p = \frac{1}{24}$$

Dans un troisième cas, on peut définir ici des points de Gauss pour une interpolation d'ordre 5 à 15 points dans un tétraèdre de référence.

Les 15 points de Gauss utilisés sont les suivants :

$$\boldsymbol{p}_{1} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_{2} = \begin{pmatrix} b_{1} \\ b_{1} \\ b_{1} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_{3} = \begin{pmatrix} b_{1} \\ b_{1} \\ c_{1} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_{4} = \begin{pmatrix} b_{1} \\ c_{1} \\ b_{1} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_{5} = \begin{pmatrix} c_{1} \\ b_{1} \\ b_{1} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_{6} = \begin{pmatrix} b_{2} \\ b_{2} \\ b_{2} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{p}_{7} = \begin{pmatrix} b_{2} \\ b_{2} \\ c_{2} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_{8} = \begin{pmatrix} b_{2} \\ c_{2} \\ b_{2} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_{9} = \begin{pmatrix} c_{2} \\ b_{2} \\ b_{2} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_{10} = \begin{pmatrix} d \\ d \\ e \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_{11} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ d \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_{12} = \begin{pmatrix} e \\ d \\ e \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{p}_{13} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ e \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_{14} = \begin{pmatrix} e \\ d \\ e \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_{15} = \begin{pmatrix} e \\ e \\ d \end{pmatrix}$$

$$(10.33)$$

avec

$$a = \frac{1}{4}$$

$$b = \frac{1}{6}$$

$$c = \frac{1}{2}$$

Les trois poids utilisés sont p pour $\boldsymbol{p}_1,$ et q pour $\boldsymbol{p}_2,\,\boldsymbol{p}_3,\,\boldsymbol{p}_4,\,\boldsymbol{p}_5,$ avec :

$$p = -\frac{2}{15}$$

$$q = \frac{3}{40}$$

10.2.4.4 Cas des prismes

Les 6 points de Gauss utilisés sont les suivants :

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}; \ \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_4 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ -b \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_5 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -b \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -b \end{pmatrix}$$
(10.34)

avec

$$a = \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Le poids utilisé est p pour $\boldsymbol{p}_1,\,\boldsymbol{p}_2,\,\boldsymbol{p}_3,\,\boldsymbol{p}_4,\,\boldsymbol{p}_5$ et $\boldsymbol{p}_6,$ avec :

$$p = \frac{1}{6}$$

10.2.4.5 Cas des hexaèdres

La méthode "produit" s'écrit :

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} y(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} \sum_{k=1}^{r_3} w_i w_j w_k y(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$$
(10.35)

où:

- w_i, w_j, w_k sont les coefficients de la méthode d'intégration;
- ξ_i , η_j et ζ_k sont les coordonnées des points d'intégration correspondants.

Une méthode directe consiste à écrire :

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} y(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^{r_1} w_i y(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$$
(10.36)

On préférera utiliser ici des points de Gauss pour une interpolation d'ordre 5 a 14 points dans un hexaèdre de référence.

Les 14 points de Gauss utilisés sont les suivants :

$$\mathbf{p}_{1} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_{2} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_{3} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_{4} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_{5} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{p}_{6} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_{7} = \begin{pmatrix} b \\ b \\ b \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_{8} = \begin{pmatrix} -b \\ b \\ b \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_{9} = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ b \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_{10} = \begin{pmatrix} b \\ b \\ -b \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{p}_{11} = \begin{pmatrix} -b \\ -b \\ b \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_{12} = \begin{pmatrix} -b \\ b \\ -b \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_{13} = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ -b \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_{14} = \begin{pmatrix} -b \\ -b \\ -b \end{pmatrix} \tag{10.37}$$

avec

$$a = \sqrt{\frac{19}{30}}$$
$$b = \sqrt{\frac{19}{33}}$$

Les poids utilisé sont p pour \boldsymbol{p}_1 , \boldsymbol{p}_2 , \boldsymbol{p}_3 , \boldsymbol{p}_4 , \boldsymbol{p}_5 et \boldsymbol{p}_6 , et q pour \boldsymbol{p}_7 , \boldsymbol{p}_8 , \boldsymbol{p}_9 , \boldsymbol{p}_{10} , \boldsymbol{p}_{11} , \boldsymbol{p}_{12} , \boldsymbol{p}_{13} et \boldsymbol{p}_{14} , avec :

$$p = \frac{320}{361}$$
$$q = \frac{121}{361}$$

Il est possible également d'utiliser une méthode d'interpolation d'ordre 3 à 6 points dans un hexaèdre de référence.

Remarque 10.2.4 Les résultats avec cette méthode d'interpolation sont moins précis.

Les 6 points de Gauss utilisés sont les suivants :

$$\boldsymbol{p}_{1} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -c \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_{2} = \begin{pmatrix} a \\ -b \\ -c \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_{3} = \begin{pmatrix} -a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_{4} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ c \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_{5} = \begin{pmatrix} -d \\ 0 \\ -c \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_{6} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$
 (10.38)

avec:

$$a = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$d = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Le poids utilisé est p pour $\boldsymbol{p}_1,\,\boldsymbol{p}_2,\,\boldsymbol{p}_3,\,\boldsymbol{p}_4,\,\boldsymbol{p}_5,\,\boldsymbol{p}_6,$ avec :

$$p = \frac{4}{3}$$

Enfin, la méthode d'interpolation de code_Aster à 8 points peut être utilisée.

$$\mathbf{p}_{1} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_{2} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ -a \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_{3} = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ a \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_{4} = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ -a \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{p}_{5} = \begin{pmatrix} -a \\ a \\ a \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_{6} = \begin{pmatrix} -a \\ a \\ -a \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_{7} = \begin{pmatrix} -a \\ -a \\ a \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_{8} = \begin{pmatrix} -a \\ -a \\ -a \end{pmatrix}$$
 (10.39)

avec:

$$a = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Le poids utilisé est p pour $\boldsymbol{p}_1,\,\boldsymbol{p}_2,\,\boldsymbol{p}_3,\,\boldsymbol{p}_4,\,\boldsymbol{p}_5,\,\boldsymbol{p}_6,\,\boldsymbol{p}_7,\,\boldsymbol{p}_8,$ avec :

$$p = 1$$

10.2.4.6 Cas des pyramides

Les points de Gauss utilisés sont issus du code_Carmel Spectral.

Les 8 points de Gauss utilisés sont les suivants :

$$\boldsymbol{p}_{1} = \begin{pmatrix} a_{1} \\ a_{1} \\ h_{1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_{2} = \begin{pmatrix} a_{1} \\ b_{1} \\ h_{1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_{3} = \begin{pmatrix} b_{1} \\ a_{1} \\ h_{1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_{4} = \begin{pmatrix} b_{1} \\ b_{1} \\ h_{1} \end{pmatrix}$$
(10.40)

$$\boldsymbol{p}_{5} = \begin{pmatrix} a_{2} \\ a_{2} \\ h_{2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_{6} = \begin{pmatrix} a_{2} \\ b_{2} \\ h_{2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_{7} = \begin{pmatrix} b_{2} \\ a_{2} \\ h_{2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_{8} = \begin{pmatrix} b_{2} \\ b_{2} \\ h_{2} \end{pmatrix}$$
(10.42)

(10.41)

avec:

$$a_1 = 0.18543444$$

$$b_1 = 0.69205074$$

$$a_2 = 0.09633205$$

$$b_2 = 0.35951611$$

$$h_1 = 0.12251482$$

$$h_2 = 0.54415184$$

Les deux poids utilisés sont w_1 pour $\boldsymbol{p}_1,\,\boldsymbol{p}_2,\,\boldsymbol{p}_3$ et $\boldsymbol{p}_4,$ et w_2 pour $\boldsymbol{p}_5,\,\boldsymbol{p}_6,\,\boldsymbol{p}_7$ et $\boldsymbol{p}_8,$ avec :

$$w_1 = 0.05813686$$
$$w_2 = 0.02519647$$

On peut vérifier que la somme des 8 poids est bien égale à 1/3, l'aire de la pyramide de référence.

Chapitre 11

Numérotation des inconnues

11.1 Principe générale de la numérotation

On rappelle l'écriture matricielle générique obtenue plus haut. Dans les paragraphes précédents, on a vu que la modélisation de dispositifs électrotechniques peut générer une quantité de problèmes différents, en fonction de la formulation utilisée et de la prise en compte ou non du couplage électrique ou mécanique. En reprenant les approches présentées plus haut, l'ensemble de ces modèles peut être représenté par le problème générique suivant :

Trouver $\mathbf{X}(t) \in \mathbb{R}^N$ tel que :

$$\mathbf{K} \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} + (\mathbf{M}_{\theta}(\theta) + \mathbf{M}(\mathbf{X})) \mathbf{X}(t) = \mathbf{C} \mathbf{U}(t), \quad \forall t \in [0, T],$$
(9.61)

et trouver $\theta(t) \in \mathbb{R}$ tel que :

$$J_{M} \frac{d^{2}\theta(t)}{dt^{2}} + f_{M} \frac{d\theta(t)}{dt} = \Gamma_{B}(\mathbf{X}) + \Gamma_{M}(t)$$

$$(9.62)$$

avec on le rappelle $\mathbf{U}(t)$ qui représente la commande en tension et/ou en courant du système. A partir de ces deux équations certains termes vont se simplifier en fonction de l'application étudiée. ainsi, si le problème n'a ni domaine conducteur, ni couplage circuit, on a $\mathbf{K} = 0$.

11.1.1 Numérotation pour code_Carmel temporel

Si on considère un problème magnétodynamique en formulation ${\bf A}-\phi$ avec couplage circuit, alors ${\bf X}$ s'écrit :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_A \\ \mathbf{X}_\phi \\ i_{\nu_1} \\ \vdots \\ i_{\nu_{|\nu|}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N_a + N_n + |\nu|}$$

$$(11.1)$$

avec :

$$N = N_a + N_n + |\nu|$$

Remarque 11.1.1 On commence par numéroter les inconnues d'arêtes, puis les inconnues nodales et, enfin, les inconnues de type électrique ou magnétique.

- 11.1.2 Numérotation pour code_Carmel spectral
- 11.2 Traitement des conditions aux limites
- 11.3 Traitement des conditions de périodicité
- 11.4 Traitement des grandeurs globales

Chapitre 12

Assemblage

12.1 Principe général de l'assemblage

12.2 Matrice globale en électrocinétique

Le traitement de la formulation électrocinétique ne concerne que code_Carmel temporel.

12.2.1 Formulation φ en tension imposée

On a obtenu plus haut la forme faible de cette formulation :

$$\forall w_i^0 \in \mathcal{W}_{\Gamma_b}^0 \quad \sum_{n \in \mathcal{N}_b} \varphi_n \int_{\mathcal{D}_c} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} w_i^0 \cdot \operatorname{\mathbf{grad}} w_n^0 \, d\mathcal{D}_c = -\int_{\mathcal{D}_c} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} w_i^0 \cdot \operatorname{\mathbf{grad}} \alpha V \, d\mathcal{D}_c \qquad (9.25)$$

Ceci peut s'écrire sous forme matricielle :

$$[SPhi] = \left[\int_{\mathcal{D}} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} w_i^0 \cdot \operatorname{\mathbf{grad}} w_n^0 d\mathcal{D} \right] \quad 1 \le i \le n_0$$

$$1 \le n \le n_0$$

$$(12.1)$$

Remarque 12.2.1 Dans la version temporelle, σ peut être un tenseur.

Et, en ayant préalablement calculé la fonction α :

$$[\text{source4}] = -\left[\int_{\mathcal{D}} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} w_i^0 \cdot \operatorname{\mathbf{grad}} \alpha V d\mathcal{D}\right] \quad 1 \le i \le n_0$$
(12.2)

On obtient l'expression synthétique :

$$\begin{bmatrix}
[SPhi] \\
\varphi_{n_0}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\varphi_1 \\
\vdots \\
\varphi_{n_0}
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
source4
\end{bmatrix}$$
(12.3)

12.2.2 Formulation φ en courant imposé

On a obtenu plus haut la formulation électrocinétique sous sa forme intégrale :

$$\forall w_{i}^{0} \in \mathcal{W}_{\Gamma_{b}}^{0} \quad \sum_{n \in \mathcal{N}_{h}} \varphi_{n} \int_{\mathcal{D}_{c}} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} w_{i}^{0} \cdot \operatorname{\mathbf{grad}} w_{n}^{0} d\mathcal{D}_{c} + \int_{\mathcal{D}_{c}} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} w_{i}^{0} \cdot \operatorname{\mathbf{grad}} \alpha V d\mathcal{D}_{c} = 0$$

$$\sum_{n \in \mathcal{N}_{h}} \varphi_{n} \int_{\mathcal{D}_{c}} \operatorname{\mathbf{grad}} \alpha \cdot \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} \left(w_{n}^{0} + \alpha V \right) d\mathcal{D}_{c} = I$$

$$(9.26)$$

On obtient l'expression synthétique :

$$\begin{bmatrix}
SPhi & 0 \\
\vdots \\
0 & V
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
0 \\
\vdots \\
0 \\
I
\end{bmatrix}$$
(12.4)

12.2.3 Formulation en T

On rappelle la forme faible de l'équation :

$$\forall \mathbf{w}_{i}^{1} \in \mathcal{W}_{\Gamma_{h}}^{1} \quad \sum_{a \in \mathcal{A}_{h}} T_{a} \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{w}_{i}^{1} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a}^{1} d\mathcal{D} = -\sum_{a \in \mathcal{A}} h_{a,s} \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{w}_{i}^{1} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a}^{1} d\mathcal{D}$$
 (12.5)

12.3 Matrice globale en magnétostatique - Cas temporel

12.3.1 Formulation en potentiel vecteur magnétique

On rappelle la forme faible de cette formulation :

$$\forall \mathbf{w}_{i}^{1} \in \mathcal{W}_{\Gamma_{b}}^{1} \quad \sum_{a \in A} a_{a} \int_{\mathcal{D}} \nu \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{w}_{i}^{1} \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{w}_{a}^{1} d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{J}_{s} \cdot w_{i}^{1} d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{D}} \nu \mathbf{w}_{i}^{1} \cdot \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{B}_{r} d\mathcal{D}$$
(9.32)

Ceci s'écrie sous forme matricielle en posant :

SALineaire =
$$\left[\int_{\mathcal{D}} \nu \operatorname{\mathbf{rotw}}_{i}^{1} \operatorname{\mathbf{rotw}}_{a}^{1} d\mathcal{D} \right] \underset{1 \leq j \leq n_{1}}{1 \leq i \leq n_{1}}$$
(12.6)

Pour les termes sources :

$$tCAiI_s = \left[\int_{\mathcal{D}} \mathbf{J}_s \cdot w_j^1 d\mathcal{D} \right]_{1 \le i \le n_s}$$
(12.7)

source2 =
$$\left[\int_{\mathcal{D}} \nu \, \mathbf{w}_j^1 \cdot \mathbf{rot} \, \mathbf{B}_r \, d\mathcal{D} \right]_{1 \le j \le n}$$
, (12.8)

Ceci s'écrit sous forme synthétique :

$$\left(\begin{array}{c}
\text{SALineaire} \\
\left(\begin{array}{c}
A_1 \\
\vdots \\
A_{n_1}
\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}
\text{tCAi}
\end{array}\right) I_s + \left(\begin{array}{c}
\text{source2}
\end{array}\right)$$
(12.9)

Une non-linéarité peut être introduite sur la réluctivité (ou la perméabilité magnétique) d'un milieu. Le nouveau système matriciel sera vu au paragraphe 14.3.4.1.

12.3.2 Formulation en potentiel scalaire magnétique

On rappelle la forme faible de cette formulation :

$$\forall w_{i}^{0} \in \mathcal{W}_{\Gamma_{h}}^{0} \quad \sum_{n \in \mathcal{N}_{h}} \Omega_{n} \int_{\mathcal{D}} \mu \operatorname{\mathbf{grad}} w_{i}^{0} \cdot \operatorname{\mathbf{grad}} w_{n}^{0} d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \mu \operatorname{\mathbf{grad}} w_{i}^{0} \cdot \operatorname{\mathbf{H}}_{s} d\mathcal{D} - \int_{\mathcal{D}} w_{i}^{0} \operatorname{div} \operatorname{\mathbf{B}}_{r} d\mathcal{D} \quad (12.10)$$

- 12.4 Matrice globale en magnétostatique Cas harmonique
- 12.4.1 Formulation en potentiel vecteur magnétique
- 12.4.2 Formulation en potentiel scalaire magnétique
- 12.5 Matrice globale en magnétodynamique Cas temporel
- 12.5.1 Formulation en potentiel vecteur magnétique

La forme faible du système d'équations à résoudre est rappelée ci-dessous.

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{w}_{i}^{1} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A} + \sigma \mathbf{w}_{i}^{1} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) \right] d\mathcal{D} =
\int_{\mathcal{D}} \mathbf{J}_{s} \cdot \mathbf{w}_{i}^{1} d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{B}_{r} \cdot \mathbf{w}_{i}^{1} d\mathcal{D} \quad (12.11)
\int_{\mathcal{D}} \sigma \, \mathbf{grad} w_{i}^{0} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) d\mathcal{D} = 0$$
(9.39)

- 12.5.2 Formulation en potentiel scalaire magnétique
- 12.6 Matrice globale en magnétodynamique Cas harmonique
- 12.6.1 Formulation en potentiel vecteur magnétique

On montre que le système 9.48 peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{A}\mathbf{X}(t) = \mathbf{B}(t) - \mathbf{C}(\mathbf{X}(t)); \quad \forall t \in \mathcal{T}$$
(12.12)

C'est un système non-linéaire de taille $N=n_0+2\,n_1$. \mathbf{X} contient les inconnues du problème, c'est-à-dire $\mathbf{X}=\left(A_1\left(t\right)...A_{n_1}\left(t\right),A_1^{\partial}\left(t\right)...A_{n_1}^{\partial}\left(t\right),\varphi_1\left(t\right)...\varphi_{n_0}\left(t\right)\right)^t$. La matrice \mathcal{A} est la partie linéaire du système à résoudre. A l'instant t_0 donné, le système 12.12 s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}_{1} & \mathbf{R}_{2} & \mathbf{R}_{3} \\ & & & \\ 0 & \mathbf{R}_{3}^{t} & \mathbf{R}_{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^{\partial} \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{1} & \mathbf{L2} \\ & & \\ \mathbf{L}_{3} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{J}^{0} \\ & \\ \mathbf{B}^{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{4} \mathbf{H}^{\Gamma} \\ & \\ \mathbf{L}_{5} \mathbf{J}^{\Gamma} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{K} (\mathbf{A}) \\ & \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} (12.13)$$

avec:

$$\begin{split} &(\mathbf{R}_1)_{ij} &= \int_{\mathcal{D}} \overline{\mathbf{v}} \, \mathbf{rot} \mathbf{w}_i^1 \, . \, \mathbf{rot} \mathbf{w}_j^1 \, d\mathcal{D}, \quad 1 \leq i, j \leq n_1 \\ &(\mathbf{R}_2)_{ij} &= \int_{\mathcal{D}} \sigma \, \mathbf{w}_i^1 \, . \, \mathbf{w}_j^1 \, d\mathcal{D}, \quad 1 \leq i, j \leq n_1 \\ &(\mathbf{R}_3)_{ij} &= \int_{\mathcal{D}} \sigma \, \mathbf{grad} \mathbf{w}_i^0 \, . \, \mathbf{w}_j^1 \, d\mathcal{D}, \quad 1 \leq i \leq n_0 \, \mathrm{et} \, 1 \leq j \leq n_1 \\ &(\mathbf{R}_4)_{ij} &= \int_{\mathcal{D}} \sigma \, \mathbf{grad} \mathbf{w}_i^0 \, . \, \, \mathbf{grad} \mathbf{w}_j^0 \, d\mathcal{D}, \quad 1 \leq i, j \leq n_0 \\ &(\mathbf{L}_1)_{ij} &= \int_{\mathcal{D}} \mathbf{w}_i^2 \, . \, \mathbf{w}_j^1 \, d\mathcal{D}, \quad 1 \leq i \leq n_2 \, \mathrm{et} \, 1 \leq j \leq n_1 \\ &(\mathbf{L}_2)_{ij} &= \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{w}_i^2 \, . \, \mathbf{w}_j^1 \, d\mathcal{D}, \quad 1 \leq i \leq n_2 \, \mathrm{et} \, 1 \leq j \leq n_1 \\ &(\mathbf{L}_3)_{ij} &= \int_{\mathcal{D}} \mathbf{w}_i^2 \, . \, \mathbf{grad} \mathbf{w}_j^0 \, d\mathcal{D}, \quad 1 \leq i \leq n_2 \, \mathrm{et} \, 1 \leq j \leq n_0 \\ &(\mathbf{L}_4)_{ij} &= \int_{\Gamma} \left(\mathbf{w}_i^1 \times \mathbf{n} \right) \, . \, \mathbf{w}_j^1 \, d\gamma, \quad 1 \leq i, j \leq n_1 \\ &(\mathbf{L}_5)_{ij} &= \int_{\Gamma} \left(\mathbf{w}_i^2 \times \mathbf{n} \right) \, \mathbf{w}_j^0 \, d\gamma, \quad 1 \leq i \leq n_2 \, \mathrm{et} \, 1 \leq j \leq n_1 \\ &\mathbf{K} \, (\mathbf{A}) &= \int_{\mathcal{D}} \mathcal{K} \, (\mathbf{A}) \, . \, \mathbf{rot} \mathbf{w}_f^1 \, d\mathcal{D}, \quad 1 \leq f \leq n_1 \end{split}$$

12.6.2 Formulation en potentiel scalaire magnétique

12.7 Traitement des grandeurs globales

12.7.1 Magnétodynamique

12.7.1.1 Imposition d'une tension sur un conducteur bobiné

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{\mu} \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{w'}_{a}^{1} \cdot \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{A}_{(i+1)} + \sigma \mathbf{w'}_{a}^{1} \cdot \left(\frac{\mathbf{A}_{(i+1)}}{\Delta t} + \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi_{(i+1)} \right) \right] d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{J}_{\mathbf{s}(i+1)} \cdot \mathbf{w'}_{a}^{1} d\mathcal{D}
+ \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{B}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{w'}_{a}^{1} d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{D}} \sigma \mathbf{w'}_{a}^{1} \frac{\mathbf{A}_{(i)}}{\Delta t} d\mathcal{D}
\int_{\mathcal{D}} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} w'_{n}^{0} \left(\frac{\mathbf{A}_{(i+1)}}{\Delta t} \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi_{(i+1)} \right) d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} w'_{n}^{0} \frac{\mathbf{A}_{(i)}}{\Delta t} d\mathcal{D}
(9.52)$$

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{\mathbf{A}_{(i+1)}}{\Delta t} \cdot \mathbf{N} d\mathcal{D} + R i = V + \int_{\mathcal{D}} \frac{\mathbf{A}_{(i)}}{\Delta t} \cdot \mathbf{N} d\mathcal{D} \tag{12.14}$$

12.8 Couplage avec un circuit extérieur

12.8.1 Décomposition du courant source

On rappelle que, lorsqu'un dispositif est alimenté par n^I inducteurs bobinés, la densité de courant source total $\mathbf{J}_s(\mathbf{X},t)$ se décompose sous la forme :

$$\mathbf{J}_{s}\left(\mathbf{X},t\right) = \sum_{k=1}^{n^{I}} \mathbf{N}_{k}\left(\mathbf{x}\right) i_{k}\left(t\right)$$
(12.15)

où $\mathbf{N}_k(\mathbf{x})$ (m^{-2}) est la densité de spires associée à l'inducteur $k, k = 1, ..., n^I$ et $i_k(t)$ (A) désigne le courant circulant à l'intérieur. $\mathbf{N}_k(\mathbf{x})$ peut être définie par :

$$\mathbf{N}_{k}\left(\mathbf{x}\right) = \frac{n_{k}^{s}}{\left|\Sigma_{k}\right|} \mathbf{n}_{k}\left(\mathbf{x}\right) \tag{6.2}$$

avec $|\Sigma_k|$ la surface générée par l'inducteur, n_k^s son nombre de spires et \mathbf{n}_k le vecteur unitaire normal à la section de la bobine. D'un point de vue discret, on écrit alors le second membre des problèmes magnéto-quasistatiques comme :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x},t) = \sum_{k=1}^{n^{I}} \mathbf{F}_{k}(\mathbf{x}) \ i_{k}(t)$$
(12.16)

où l'on introduit la discrétisation des vecteurs densités de spires $(\mathbf{F}_k)_i$ définis par :

$$\left(\mathbf{F}_{k}\right)_{i} = \int_{\mathcal{D}} \left(\mathbf{N}_{k} \cdot \mathbf{w}_{i}^{1}\right) d\mathbf{D} \tag{12.17}$$

12.8.2 Équation de circuit

Comme vu précédemment, on peut imposer soit le courant circulant dans les inducteurs bobinés soit la tension à leurs bornes. Dans le premier cas, les courants sont des données du problème. Dans le second, le courant circulant à l'intérieur devient une inconnue du problème. On suppose qu'une tension $v_k(t)$ est imposée aux bornes de l'inducteur k dans un circuit contenant une source de tension $v_k(t)$ en série avec une résistance R_k et une inductance L_k . R_k représente la résistance du bobinage et éventuellement une résistance extérieure, tandis que L_k permet de modéliser les fuites magnétiques associées à des têtes de bobines non modélisées et/ou une inductance extérieure. Finalement, le courant $i_k(t)$ dans ce circuit est solution de :

$$\frac{\partial \phi_k(t)}{\partial t} + L_k \frac{\partial i_k(t)}{\partial t} + R_k i_k(t) = v_k(t)$$
(12.18)

où ϕ_k est le flux magnétique capté par la bobine k. C'est ce terme qui va être utilisé pour coupler les équations de circuit avec le problème magnéto-quasistatique.

12.8.3 Expression du flux magnétique

Le flux engendra par l'inducteur s'exprime par définition comme :

$$\phi_k = n_k^s \int_{S_k} (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_k) \tag{12.19}$$

où \mathbf{S}_k désigne la surface générée par le contour de la bobine k. En appliquant le théorème de Stokes, et en utilisant $\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}$, on a :

$$\phi_k = n_k^s \oint_{l_k} (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_k) = n_k^s \oint_{l_k} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{N}_k) d\mathbf{l}_k$$
 (12.20)

où l_k désigne le contour fermé délimitant la surface S_k , montré là encore sur la figure 6.1. En utilisant la définition de \mathbf{N}_k (cf. expression 6.2), on trouve finalement :

$$\phi_k = \int_{\mathcal{D}_k} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{N}_k) \ dV_k \tag{12.21}$$

où : $V_k = \oint_{l_k} |\Sigma_k| \, d\mathbf{l}_k$ désigne le volume de l'inducteur. D'un point de vue discret, cette relation s'écrit simplement :

$$\phi_k = \mathbf{F}_k^t \, \mathbf{X_A} \tag{12.22}$$

avec \mathbf{F}_k défini par l'expression 12.17.

12.8.4 Couplage fort de l'équation magnétique avec les équations de circuit

Afin de présenter clairement le couplage, on se place dans le cas d'un problème magnétostatique linéaire. Celui-ci s'écrit :

$$\mathbf{M}_{rr} \mathbf{X}_{A}(t) = \sum_{k \in \mathcal{I}} \mathbf{F}_{k} i_{k}(t) + \sum_{k \in \mathcal{V}} \mathbf{F}_{k} i_{k}(t), \quad \forall t \in [0, T]$$
(12.23)

où les ensembles $\mathcal I$ et $\mathcal V$ contiennent les $|\mathcal I|$ et $|\mathcal V|$ indices des inducteurs à tensions et courants imposés respectivement avec $n^I=|\mathcal I|+|\mathcal V|$. Comme expliqué précédemment, les $vert\mathcal I|$ courants imposés sont des données du problème tandis que les $|\mathcal V|$ autres deviennent des inconnues. ainsi, on définit le nouveau vecteur inconnu $\mathbf X$ contenant les inconnues magnétiques et les courants inconnus par :

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{A}(t) \\ i_{\mathcal{V}_{1}}(t) \\ \vdots \\ i_{\mathcal{V}_{|\mathcal{V}|}}(t) \end{pmatrix}$$
(12.24)

Il reste alors à coupler l'équation magnétique avec les $|\mathcal{V}|$ équations de circuits. En utilisant l'expression du flux, le problème magnétostatique couplé s'écrit :

Trouver
$$\mathbf{X}(t) \in \mathbb{R}^{N_A + |\mathcal{V}|}$$
 tel que :
$$\mathbf{K} \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} + \mathbf{M} \mathbf{X} = \mathbf{F}^{\mathcal{I}} \mathbf{I}(t) + \mathbf{F}^{\mathcal{V}} \mathbf{V}(t), \quad \forall t \in [0, T]$$
(12.25)

avec:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{rr} & -\mathbf{F}_{\mathcal{V}_1} & \cdots & -\mathbf{F}_{\mathcal{V}_{|\mathcal{V}|}} \\ \hline 0 & R_{\mathcal{V}_1} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{\mathcal{V}_{|\mathcal{V}|}} \end{pmatrix}$$
(12.26)

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} & & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & \mathbf{F}_{\mathcal{V}_1}^t & & L_{\mathcal{V}_1} & & & & \\ & & \vdots & & \ddots & & & \\ & & \mathbf{F}_{\mathcal{V}_{|\mathcal{V}|}}^t & & & L_{\mathcal{V}_{|\mathcal{V}|}} \end{pmatrix}$$
(12.27)

$$\mathbf{F}^{\mathcal{I}} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{\mathcal{I}_{1}} & \cdots & \mathbf{F}_{\mathcal{I}_{|\mathcal{I}|}} \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N_{A} + |\mathcal{V}|) \times |\mathcal{I}|}, \quad \mathbf{I}(t) = \begin{pmatrix} i_{\mathcal{I}_{1}}(t) \\ \vdots \\ i_{\mathcal{I}_{|\mathcal{I}|}}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}|}$$
(12.28)

$$\mathbf{F}^{\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ \hline 1 & & 0 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N_A + |\mathcal{V}|) \times |\mathcal{V}|} \quad \text{et } \mathbf{V}(t) = \begin{pmatrix} v_{\mathcal{V}_1}(t) \\ \vdots \\ v_{\mathcal{V}_{|\mathcal{V}|}}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{V}|}$$
 (12.29)

Enfin, on choisit d'introduire le vecteur source $\mathbf{U}(t) \in \mathbb{R}^{|\mathcal{V}|+|\mathcal{I}|}$ dans lequel on a concaténé verticalement $\mathbf{I}(t)$ avec $\mathbf{U}(t)$, ainsi que la matrice $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N \times |\mathcal{V}|+|\mathcal{I}|}$ qui contient les matrices $\mathbf{F}^{\mathcal{V}}$ et $\mathbf{F}^{\mathcal{I}}$. On a alors :

$$\mathbf{C}\mathbf{U}(t) = \mathbf{F}^{\mathcal{I}}\mathbf{I}(t) + \mathbf{F}^{\mathcal{V}}\mathbf{V}(t)$$
(12.30)

et finalement, le problème se réécrit :

Trouver
$$\mathbf{X}(t) \in \mathbb{R}^{N_A + |\mathcal{V}|}$$
 tel que :
$$\mathbf{K} \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} + \mathbf{M} \mathbf{X} = \mathbf{C} \mathbf{U}(t), \quad \forall t \in [0, T]$$
 (12.31)

12.9 Traitement des domaines non simplement connexes

Si le domaine conducteur n'est pas contractile et possède un "trou" par exemple, on introduit un vecteur \mathbf{K} et, dans ces conditions, $\mathbf{J}ind$ devient égal à :

$$\mathbf{J}ind = \mathbf{rot} \left(\mathbf{T} + i \, \mathbf{K} \right) \tag{12.32}$$

avec i un coefficient réel associé à un courant. Le vecteur \mathbf{K} est défini dans tout le domaine et le vecteur \mathbf{T} toujours égal à zéro à l'extérieur de \mathcal{D}_c . L'utilisation du vecteur \mathbf{K} est détaillée au paragraphe 3.1.

Chapitre 13

La prise en compte du mouvement

Résumé

Ce chapitre a pour but de décrire les méthodes mises en oeuvre dans code_Carmel pour prendre en compte un mouvement de rotation d'une pièce par rapport à une autre. Deux méthodes sont possibles dans la version temporel : le pas bloqué et l'overlapping. Une méthode spécifique à la version spectrale a été mise en place. Enfin, dans la version temporelle, il est possible d'avoir une charge mécanique et donc une vitesse résultant d'une équation cinématique.

13.1 Principe général

Pour simuler le mouvement d'un système électromagnétique (exemple du mouvement du rotor dans une machine électrique), lorsqu'on effectue une modélisation avec la méthode des éléments finis, diverses stratégies ou techniques numériques peuvent être envisagées. Pour ce faire, deux types de descriptions existent : l'eulérienne et la lagrangienne. La première consiste à se placer dans un référentiel fixe sur lequel on observe les différentes quantités évoluer, tandis que la seconde suit le référentiel en mouvement. La figure 13.1 présente un maillage sur lequel est calculé le mouvement du sous-domaine rouge, avec les deux types de descriptions.

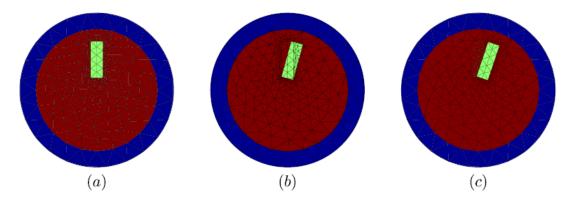


Figure 13.1 – Prise en compte du mouvement avec la description lagrangienne et eulérienne (a) : Maillage de la position initiale. (b) : Rotation du sous-domaine rouge avec la description eulérienne. (c) : Rotation du sous-domaine rouge avec la description lagrangienne. L'encoche est bien discrétisée, mais les éléments de coïncident plus au niveau de l'interface entre les sous-domaines rouge et bleu.

Dans le cadre d'une modélisation par éléments finis, l'approche eulérienne consiste alors à fixer le maillage du rotor et à faire glisser dessus les différents milieux et champs au cours du temps. Bien qu'elle soit séduisante car n'induisant pas de remaillage ou de modification de connectivité, le glissement des frontières entre milieux peut être compliqué à prendre en compte, comme on peut le voir au niveau de l'encoche verte sur la figure 13.1 (b). En effet, Les frontières des sous-domaines ne correspondant plus aux frontières des éléments, il peut alors être difficile de prendre en compte les discontinuités des champs.

Au contraire, l'approche lagrangienne va consister à faire tourner le maillage du rotor, par rapport à celui du stator, dans un mouvement de corps rigide. Ainsi, les frontières entre milieux au rotor et au stator sont naturellement préservées comme le montre la figure 13.1 (c). Le véritable enjeu est ici de savoir comment connecter le maillage du rotor avec celui du stator au cours du mouvement. Enfin, les équations de Maxwell restent invariantes même pour un mouvement non rectiligne uniforme avec ce type de description. C'est donc l'approche Lagrangienne qui sera utilisée par la suite.

Dans ce cadre, plusieurs méthodes existent. Celles-ci se différencient en particulier sur leur complexité et leur capacité à prendre en compte ou non n'importe quel mouvement de rotation. On peut néanmoins les classer dans deux catégories, présentées sur la figure 13.2.

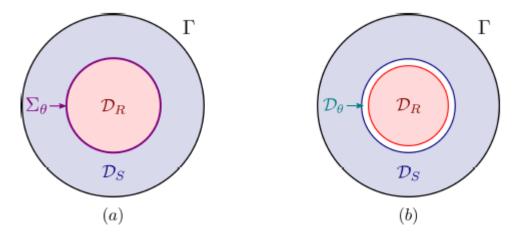


Figure 13.2 – Prise en compte du mouvement avec la description lagrangienne (a) : Mouvement calculé sur une interface Σ_{θ} . (b) : Mouvement calculé dans un domaine \mathcal{D}_{θ} .

La première catégorie regroupe les approches où le mouvement est pris en compte le long d'une interface Σ_{θ} linéique en 2D et surfacique en 3D, comme le montre la figure 13.2 (a).

Les approches peuvent être classées de la façon suivante suivant [Gasmi 1996], [Boukari 2000], [Rapetti 2000] :

- Introduction d'un terme de transport en v∧B (où v représente la vitesse de déplacement des pièces mobiles) [Maréchal 1991]. Cette solution peut être utilisée sous certaines conditions et impose des contraintes sur la structure matricielle du système à résoudre.
- Modification du maillage; remaillage local ou déformation du maillage dans une zone intégrant la frontière entre la partie fixe et la partie mobile. On peut citer : la méthode du pas bloqué [Preston at al 1988], [Boualem 1997], la bande de mouvement [Vassent 1990], [Bossavit 1993], [Sadowski 1993], [Ren 1996] et la méthode "Overlapping" [Tsukerman 1992].
- Couplage de la méthode des éléments finis, avec une autre méthode de résolution numérique. Dans ce cas, on définit un sous-domaine intégrant la frontière entre la partie fixe et la partie mobile. Dans les parties fixe et mobile, à l'exception du sous-domaine réservé au

mouvement, les équations à résoudre sont discrétisées avec la méthode des éléments finis. Dans le sous-domaine on peut utiliser le macro-élément qui consiste à rechercher une solution analytique dans une partie de l'entrefer [Féliachi 1981], [Razek et al 1982] ou bien, une méthode intégrale de frontière qui ramène la discrétisation spatiale sur la frontière du sous domaine permettant ainsi un couplage avec la méthode des éléments finis [Féliachi 1981], [Goby 1987].

— Recollement des maillages à l'interface entre la partie fixe et la partie mobile; dans ce cas nous sommes confrontés à deux maillages appelés "non-conforme" au niveau de la surface de glissement. Pour le recollement des deux maillages, on peut imposer la continuité de la grandeur inconnue à l'aide de méthodes d'interpolation [Perrin-Bit 1992], [Dreher et al 1996], [Boukari 2000] ou, en utilisant la méthode des éléments joints (Mortar) [Rapetti et al 2000], [Rapetti 2000], [Antunes et al 2005] ou les opérateurs de Lagrange [Rodger et al 1990]. Pour les deux dernières méthodes le recollement des deux maillages est effectué en imposant la continuité d'une grandeur physique sur la surface de recollement.

Parmi les méthodes proposées ci-dessus, celle basée sur l'introduction d'un terme de transport a un domaine d'utilisation limité. Par ailleurs, l'utilisation du macro-élément augmente notablement les temps de calcul et comme la méthode intégrales de frontières conduit à ajouter, au niveau de la matrice de raideur, une matrice pleine qui relie tous les termes de la frontière. Cela entraîne alors un stockage plus important et des temps de calcul relativement lourd [Gasmi 1996], [Boukari 2000].

Dans ces conditions, dans le cadre de code_Carmel ont été retenues, la méthode du pas bloqué et la méthode "Overlapping".

13.2 Méthode du pas bloqué

Il semble que les premiers travaux relatifs à la méthode intitulée "pas bloqué", ont été présentés en 1988 par [Preston at al 1988]. Une extension en 3D a été présentée en 1995 [Kawase et al 1995] puis reprise par la suite [Boualem, Piriou 1998], [Boualem 1997], [Boualem, Piriou 1998b].

13.2.1 Disposition du maillage avec la méthode du pas bloqué

Pour la méthode du pas bloqué, on considère deux maillages indépendants $\mathcal{M}_{\mathcal{D}_R}$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{D}_S}$ que l'on va chercher à recoller sur l'interface Σ_{θ} , comme présenté dans la figure 13.2 (a). Pour ce faire, il est possible de mailler normalement le domaine $\mathcal{D} = \mathcal{D}_R \cup \mathcal{D}_S$ et de virtuellement dupliquer les N_{θ} inconnues situées sur $\Sigma_{\theta} = \mathcal{D}_R \cap \mathcal{D}_S$.

Enfin, cette méthode nécessite que le maillage soit $r\acute{e}gl\acute{e}$ sur Σ_{θ} . Cela signifie qu'il existe une structure périodique du maillage sur Σ_{θ} par rotation d'angle $\Delta\theta$ comme le montre la figure 13.3 sur un exemple de maillage 2D.

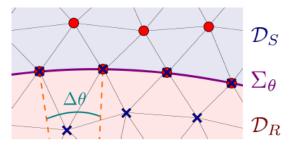


Figure 13.3 – Disposition du maillage avec la méthode du pas bloqué. Les inconnues du rotor (croix bleues) sont virtuellement dupliquées sur Σ_{θ}

Intuitivement, on comprend qu'avec cette disposition, il sera possible de prendre en compte les rotations d'angle $\theta_k = k \Delta \theta$ avec $k \in \mathbb{Z}$ par permutation d'inconnues le long de Σ_{θ} .

13.2.2 Problème éléments finis sur \mathcal{D}_R et \mathcal{D}_S

En ayant virtuellement dupliqué les inconnues sur l'interface Σ_{θ} , le problème magnétostatique linéaire s'écrit indépendamment sur \mathcal{D}_R et sur \mathcal{D}_S comme :

$$\begin{pmatrix} M_{rr}^{R} & 0 \\ 0 & M_{rr}^{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}^{R} \\ \mathbf{X}^{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{R} \\ \mathbf{F}^{S} \end{pmatrix}$$
(13.1)

où l'indice R ou S désigne les quantités définies sur le maillage du rotor et du stator respectivement. A ce stade, le problème n'est pas bien posé car les inconnues sont virtuellement dupliquées sur Σ_{θ} . Ainsi le système d'équations 13.1 n'est pas inversible. Cependant, la relation du mouvement va permettre de rendre ce problème bien posé, en plus de prendre en compte la rotation.

13.2.3 Relation de mouvement entre \mathcal{D}_R et \mathcal{D}_S

Il s'agit de trouver la bijection liant $\boldsymbol{X}_{\Sigma}^{R} \in \mathbb{R}^{N_{\theta}}$ à $\boldsymbol{X}_{\Sigma}^{S} \in \mathbb{R}^{N_{\theta}}$ au cours du mouvement, où ces deux vecteurs représentent respectivement les composantes de \boldsymbol{X}^{R} et \boldsymbol{X}^{S} dont les inconnues correspondantes appartiennent à Σ_{θ} . A l'état initial on peut supposer que :

$$\boldsymbol{X}_{\Sigma}^{R} = \boldsymbol{X}_{\Sigma}^{S} \tag{13.2}$$

Du fait de la structure périodique, il existe une **matrice de permutation** $\mathbf{R}(\theta_k) \in \mathbb{R}^{N_{\theta} \times N_{\theta}}$ permettant de représenter la rotation d'angle θ_k par :

$$\boldsymbol{X}_{\Sigma}^{R} = \mathbf{R} \left(\theta_{k} \right) \, \boldsymbol{X}_{\Sigma}^{S} \tag{13.3}$$

La matrice $\mathbf{R}(\theta_k)$ s'obtient directement à partir de la matrice de permutation unitaire $\mathbf{P} = \mathbf{R}(\Delta_{\theta})$ qui permet de permuter les indices des inconnues après une rotation d'angle $\theta = \Delta_{\theta}$. On a alors :

$$\mathbf{R}\left(\theta_{k}\right) = \mathbf{P}^{k-1} \tag{13.4}$$

où $\mathbf{R}(\theta_k)$ vérifie bien :

$$\mathbf{R}\left(\theta_{0}\right) = \mathbf{R}\left(\theta_{N_{\theta}}\right) = I_{N_{\theta}} \tag{13.5}$$

où $I_{N_{\theta}} \in \mathbb{R}^{N_{\theta} \times N_{\theta}}$ est la matrice identité de taille N_{θ} .

13.2.4 Écriture du système total avec la méthode du pas bloqué

Il reste à tirer parti de la relation du mouvement 13.3 afin de rendre le problème 13.1 bien posé. Il s'agit alors d'éliminer les N_{θ} inconnues virtuelles sur Σ_{θ} . Pour ce faire, on introduit la matrice $\mathbf{T}(\theta_k)$ rectangulaire :

$$\mathbf{T}(\theta_k) = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \\ 0 & \mathbf{R}(\theta_k) & 0 \end{pmatrix}$$
(13.6)

La relation permettant d'éliminer les N_{θ} inconnues est d'après 13.3 :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}^{R} \\ \mathbf{X}^{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{D}^{R} \\ \mathbf{X}_{\Sigma}^{R} \\ \mathbf{X}_{D}^{S} \\ \mathbf{X}_{\Sigma}^{S} \end{pmatrix} = \mathbf{T} (\theta_{k}) \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{D}^{R} \\ \mathbf{X}_{\Sigma}^{R} \\ \mathbf{X}_{D}^{S} \end{pmatrix}$$
(13.7)

où \mathbf{X}_D^R et \mathbf{X}_D^S représentent les inconnues du maillage au rotor et au stator respectivement, et qui n'appartiennent pas à Σ_{θ} . En remplaçant l'expression du vecteur inconnu dans le système initial, on a :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{rr}^{R} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{rr}^{S} \end{pmatrix} \mathbf{T} (\theta_{k}) \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{D}^{R} \\ \mathbf{X}_{\Sigma}^{R} \\ \mathbf{X}_{D}^{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{D}^{R} \\ 0 \\ \mathbf{F}_{D}^{S} \\ 0 \end{pmatrix}$$
(13.8)

La forme particulière du second membre est dû au fait que les sources de champ ne sont pas en contact avec Σ_{θ} . Le système précédent ayant N_{θ} équations de plus qu'il n'y a d'inconnues, il s'agit alors d'éliminer des équations en sommant les contributions sur Σ_{θ} . En pratique, cette opération est simplement réalisée en multipliant le système 13.8 par $\mathbf{T}^{t}(\theta_{k})$ [Antunes et al 2006]. Ainsi, le système total carré s'écrit :

$$\mathbf{T}^{t}\left(\theta_{k}\right)\left(\begin{array}{cc}\mathbf{M}_{rr}^{R} & 0\\ 0 & \mathbf{M}_{rr}^{S}\end{array}\right)\mathbf{T}\left(\theta_{k}\right)\left(\begin{array}{c}\mathbf{X}_{D}^{R}\\ \mathbf{X}_{\Sigma}^{R}\\ \mathbf{X}_{D}^{S}\end{array}\right) = \mathbf{T}^{t}\left(\theta_{k}\right)\left(\begin{array}{c}\mathbf{F}_{D}^{R}\\ 0\\ \mathbf{F}_{D}^{S}\\ 0\end{array}\right)$$
(13.9)

En appelant ${\bf X}$ le nouveau vecteur inconnu, on peut montrer que le système précédent se ramène à :

$$\left(\mathbf{M}_{rr} + \mathbf{M}_{pf}\left(\theta_{k}\right)\right) \mathbf{X} = \mathbf{F} \tag{13.10}$$

Ici \mathbf{M}_{rr} est la partie invariante par rotation d'angle θ_k . Concrètement, elle représente les interactions issues des éléments ne touchant pas Σ_{θ} . Au contraire, $\mathbf{M}_{pf}(\theta_k)$ est la matrice qui varie à chaque rotation. Cependant, cette dernière a un nombre de termes non nuls faibles car elle est issue de l'assemblage des éléments adjacents à Σ_{θ} . Enfin, le vecteur source n'étant pas attenant à Σ_{θ} , $\mathbf{F} = \mathbf{T}^t(\theta_k)$ (\mathbf{F}_D^R ; 0; \mathbf{F}_D^S ; 0) défini dans 13.9 ne dépend pas de θ .

13.2.5 Conclusion

Dans le cas de la méthode du pas bloqué, on permute les inconnues nodales au niveau de la surface de glissement. Pour la formulation en potentiel vecteur se sont les inconnues circulation sur les arêtes qui permutent.

Ce changement est effectué au niveau du tableau de connectivité. Les conditions de périodicité ou d'anti-périodicité sont assurées par les inconnues situées aux extrémités de la surface de glissement. Pour réaliser le déplacement relatif, on corrige uniquement la connectivité dans les éléments mobiles qui touchent la surface de glissement.

Cette méthode présente l'avantage d'avoir un maillage toujours conforme. Elle est simple à mettre en œuvre et les propriétés des éléments finis sont conservées. De ce fait, la prise en compte du mouvement n'introduit pas de nouvelle erreur numérique. Dans ces conditions, lors de comparaisons, cette méthode est souvent considérée comme la référence pour évaluer la qualité de la solution.

Néanmoins, la contrainte sur le pas du mouvement qui doit correspondre au pas du maillage, constitue le principal inconvénient.

La méthode du pas bloqué est implantée dans le logiciel code_Carmel (version temporelle) et est utilisée pour modéliser des machines tournantes avec la formulation en potentiel vecteur ou en potentiel scalaire.

13.3 Méthode Overlapping

Cette méthode proposée par [Tsukerman 1992] a été développée à l'origine, pour la modélisation en 2D avec la formulation en potentiel vecteur. Elle a été reprise ensuite pour être appliquée en 2D à des machines électriques [Biddlecombe et al 1988], [Lepaul et al 1999].

Afin de simplifier la présentation de la méthode, on se place sur un cas 2D modélisant une coupe de machine. le principe reste identique en 3D, et le calcul explicite des fonctions de forme en 3D peut être trouvé dans l'annexe D.

13.3.1 Disposition du maillage avec la méthode overlapping

Afin d'appliquer la méthode overlapping, il faut que les maillages du rotor $\mathcal{M}_{\mathcal{D}_R}$ et du stator $\mathcal{M}_{\mathcal{D}_S}$ soient séparés par une fine couche non maillée \mathcal{D}_{θ} , comme le montre la figure 13.2.

On appelle Σ_{θ}^{R} et Σ_{θ}^{S} les interfaces respectives de \mathcal{D}_{R} et \mathcal{D}_{S} , le long de \mathcal{D}_{θ} . De plus, on fait l'hypothèse que les maillages sur Σ_{θ}^{R} et Σ_{θ}^{S} sont constitués de quadrangles réguliers ayant une même structure périodique selon θ . Ainsi, on peut supposer que le maillage de Σ_{θ}^{S} à l'état initial est obtenu par une projection normale du maillage de \mathcal{D}_{R} . Bien que la méthode overlapping soit possible pour des maillages non réguliers, cette hypothèse permet de simplifier la méthode ainsi que son coût calculatoire, la rendant compatible avec la réduction de modèles.

13.3.2 Extension des fonctions de forme nodale sur \mathcal{D}_{θ}

Le principe de la méthode consiste premièrement à étendre les fonctions nodales de $\mathbf{W}^0(\mathcal{D}_h)$ sur le domaine non maillé \mathcal{D}_{θ} , et ce, de façon continue. Pour ce faire, le support des fonctions nodales du stator (associées aux inconnues appartenant à Σ_{θ}^S) est étendu par projection normale sur Σ_{θ}^R , comme le montre la figure 13.4 (b) sur un exemple en 2D.

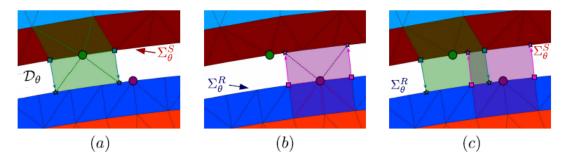


Figure 13.4 – Interaction Overlapping. (a) : fonction nodale statorique étendue sur Γ_{θ}^{R} . (b) : fonction nodale rotorique étendue sur Γ_{θ}^{S} . (c) : interaction entre les deux fonctions nodales.

De même, le support des fonctions nodales du rotor est étendu à \mathcal{D}_{θ} comme on peut le voir sur la figure 13.4 (b). Finalement, la figure 13.4 (c) montre qu'il existe une zone de recouvrement des deux fonctions nodales dans \mathcal{D}_{θ} . Celle-ci représente l'interaction d'une arête au stator avec deux arêtes du rotor, la figure 13.5 montre que l'on peut définir deux zones d'intégration : une gauche et une autre droite.

13.3.3 Élément de référence overlapping

Afin de calculer les quantités sur les deux zones, on introduit les deux éléments de référence présentées sur les figures 13.6 et 13.7. Il s'agit de deux quadrangles avec des "pattes" dont la longueur dépend des valeurs a, b, c et d définis dans les deux figures 13.6 et 13.7.

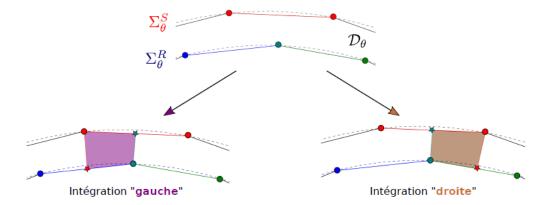


Figure 13.5 – Zones d'intégration gauche et droite liées à l'arête du stator (rouge). les ronds représentent des noeuds du maillage, tandis que les étoiles sont des noeuds fictifs, obtenus par projection normale des noeuds réels sur l'arête opposée. Ces derniers ne servent qu'à définir la zone d'intégration et ne sont pas des inconnues du problème.

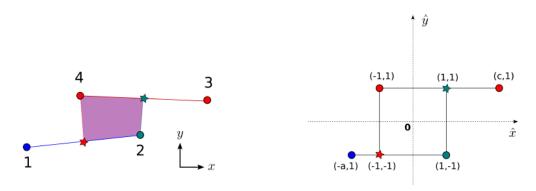


Figure 13.6 – Élément réel et de référence pour la zone d'intégration gauche

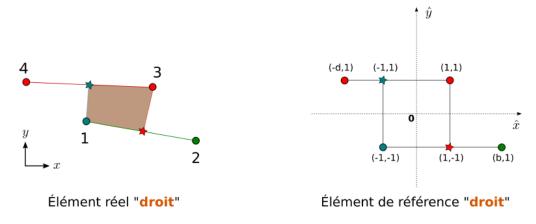


Figure 13.7 – Élément réel et de référence pour la zone d'intégration droite

On peut alors définir un élément de référence générique que l'on présente dans la figure 13.8.

Si a=c=1, alors il permet de retrouver l'élément droit, tandis que b=d=1 décrit l'élément gauche.

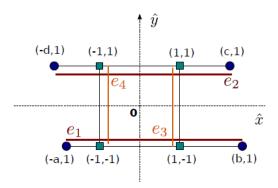


Figure 13.8 – Élément de référence générique

L'extension de cet élément de référence en 3D, ainsi que les fonctions de forme sont présentées dans l'annexe D. Concrètement, il s'agit d'un hexaèdre avec des "pattes surfaciques", par analogie avec les pattes linéiques de l'élément de référence en 2D.

13.3.4 Gestion des inconnues d'arêtes

Concernant les inconnues, l'élément de référence présenté dans la figure 13.8 montre que l'on peut calculer les termes d'intégration grâce aux quatre noeuds réels, sans introduire d'inconnue nodale supplémentaire. Cependant, ce n'est plus exact en ce qui concerne les inconnues d'arêtes, nécessaire pour des applications 3D. En effet, on voit sur la figure D les deux arêtes verticales e_3 et e_4 . Celles-ci relient \mathcal{D}_R à \mathcal{D}_S sur \mathcal{D}_θ . A première vue, il faudrait donc associer des inconnues à ces arêtes. Ainsi, le principe de l'overlapping, qui est de ne pas créer d'inconnues supplémentaires sur \mathcal{D}_θ , n'est plus vérifié. Heureusement, la jauge d'arbre permet de ne pas contredire ce principe.. En effet, il existe une infinité de vecteurs \mathbf{A} tel que $\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}$.

D'un point de vue numérique, cela signifie que le problème est sous-déterminé et donc que l'on peut éliminer un certain nombre d'inconnues. Pour ce faire, il est possible d'éliminer les arêtes associées à un arbre couvrant le maillage [Le Menach 1999], c'est-à-dire passant par tous les noeuds du maillage et ne se refermant pas sur lui-même. Il n'y aura donc pas d'inconnues associées aux arêtes e_3 et e_4 reliant \mathcal{D}_R à \mathcal{D}_S . Ceci permet finalement de modéliser le mouvement sans ajouter d'inconnue supplémentaire.

13.3.5 Écriture du système total avec la méthode overlapping

On rappelle que l'approche est présentée en 2D, mais peut être directement appliquée en 3D si les deux maillages surfaciques du rotor et du stator sont composés de quadrangles réguliers et qui coïncident l'un avec l'autre. Ainsi l'élément overlapping en 3D ainsi que les fonctions de forme nodales et d'arêtes sont présentées dans l'annexe D.

Pour conclure, on peut résumer l'approche overlapping en deux étapes :

— La détermination des éléments de référence overlapping : pour chaque position rotorique, il faut déterminer les deux arêtes du rotor qui vont interagir avec chaque arête du stator, et déterminer les quatre valeurs de a, b, c et d. En pratique, si le maillage des deux interfaces Σ_{θ}^{R} et Σ_{θ}^{S} est périodique et coı̈ncidents l'un avec l'autre, cette tâche peut n'être réalisée que pour une seule arête du stator (qui interagit avec seulement deux arêtes du rotor). En effet, la structure périodique sur Σ_{θ}^{R} et Σ_{θ}^{S} implique que les éléments de référence gauche et droit vont être identique sur \mathcal{D}_{θ} .

— L'assemblage des matrices éléments finis sur \mathcal{D}_{θ} . Comme \mathcal{D}_{θ} se situe dans l'entrefer constitué d'air uniquement, les seuls termes à calculer seront ceux de la matrice Rot-Rot. Ainsi, on définit la matrice symétrique semi-définie positive $\mathbf{M}_{ovl}(\theta) \in \mathbb{R}^{N_a \times N_a}$ telle que :

$$\left(\mathbf{M}_{ovl}\left(\theta\right)\right)_{i,j} = \int_{\mathcal{D}_{\theta}} \left(\nu_0 \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{w}_i^1 \cdot \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{w}_j^1\right) d\mathcal{D}_{\theta}$$
(13.11)

En pratique, on calculera cette expression en assemblant dans chaque élément overlapping les matrices élémentaires. D'après le point précédent, ces dernières sont identiques pour l'élément gauche et droit selon θ . Ainsi, il ne faut calculer qu'une matrice élémentaire "gauche" et une autre "droite", que l'on assemblera de façon globale sur \mathcal{D}_{θ} afin de calculer $\mathbf{M}_{ovl}\left(\theta\right)$.

Dans le cas d'un problème magnétostatique linéaire, le système final s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{rr}^{R} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{rr}^{S} \end{pmatrix} + \mathbf{M}_{ovl}(\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}^{R} \\ \mathbf{X}^{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{R} \\ \mathbf{F}^{S} \end{pmatrix}$$
(13.12)

où \mathbf{X}^R et \mathbf{X}^S désignent les inconnues sur \mathcal{D}_R et sur \mathcal{D}_S respectivement. Contrairement au pas bloqué, le système total n'est pas projeté sur l'interface. Il suffit d'ajuster la matrice $\mathbf{M}_{ovl}(\theta)$ au système original, ce qui permet de coupler les deux sous-domaines et, ainsi de modéliser le mouvement du rotor.

On trouvera en annexe D, la technique d'intégration de Gauss adaptée aux fonctions de formes de la méthode "Overlapping".

13.4 Méthode spécifique pour la version spectrale

A DÉTAILLER

13.5 Couplage cinématique

13.5.1 Mise en équation du problème physique

Il est possible d'associer à la partie en mouvement une équation mécanique telle que :

$$J\frac{d\Omega}{dt} = C_{em} + C_r - f\Omega \tag{13.13}$$

où:

- C_{em} est le couple électromagnétique calculé par code_Carmel (unités S.I. : N.m);
- C_r est le couple résistant imposé par l'utilisateur (unités S.I. : N.m);
- J est l'inertie de la partie en mouvement (unités S.I. : N.m.s²);
- f est le coefficient de frottement (unités S.I. : N.m.s);
- $\Omega = \frac{d\theta(t)}{dt}$ est la vitesse de rotation (unités S.I. : rad.s⁻¹).

13.5.2 Traitement

Après le calcul du couple électromagnétique, une discrétisation temporelle à l'aide de la méthode d'Euler implicite de l'équation mécanique permet de calculer la valeur de la vitesse de rotation au pas temporel de calcul considéré Ω_t .

$$J\frac{\Omega_t - \Omega_{t-1}}{\Delta t} = C_{em_t} + C_{r_t} - f\Omega_t \tag{13.14}$$

La position angulaire de la partie tournante est augmentée de la quantité $\Delta \theta = \Delta \Omega \Delta t$.

13.5.3 Couplage faible de l'équation magnétique avec l'équation mécanique

Il reste donc à coupler le problème magnétoquasi-statique avec l'équation mécanique. Puisque la constante de temps mécanique est pour les applications typiques de l'électrotechnique bien plus grande que celle du problème magnétique, un couplage fort entre les deux problèmes n'est pas nécessaire.

Pour aller plus loin, un chaînage entre les deux équations est même possible à condition que la constante de discrétisation temporelle soit suffisamment petite de sorte qu'elle puisse capturer la dynamique des deux modèles. Ainsi l'équation magnétique et mécanique seront résolues successivement au cours de la simulation.

Chapitre 14

Traitement des non-linéarités

14.1 Point fixe

14.1.1 Description de la méthode

La méthode du point fixe, appelée aussi méthode de Picard [Miellou, Spiteri 1985], consiste à transformer l'équation du système initial f(x) = 0 en une autre, équivalente g(x) = x ayant la même solution comme décrit dans la figure 14.1.

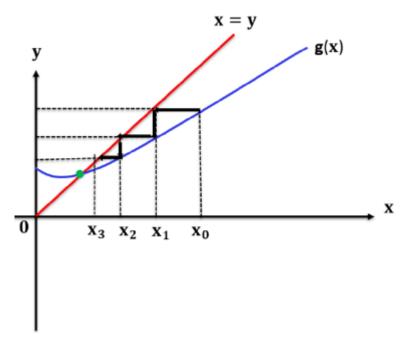


Figure 14.1 – Méthode du point fixe.

Donc, approcher des zéros de la fonction initiale f revient à approcher les points fixes de la fonction équivalente g qui sera motivée par les exigences du théorème de point fixe. Pour mieux comprendre le mécanisme de cette méthode on a besoin d'introduire quelques définitions.

Définition 14.1.1 *Soit* $f: I \to \mathbb{R}$, *on appelle zéro ou racine de f tout* $\overline{x} \in I$ *qui satisfait* $f(\overline{x}) = 0$.

Définition 14.1.2 On appelle point fixe de f tout \overline{x} qui satisfait $f(\overline{x}) = \overline{x}$.

Théorème 14.1.1 Théorème des valeurs intermédiaires : Soit f une fonction continue sur I = [a,b]. Alors f atteint toutes les valeurs entre f(a) et f(b), $\forall d \in [f(a),f(b)]$, il existe $c \in I$ tel que f(c) = d.

Corollaire 14.1.1 Soit $f: I = [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue telle que f(a) f(b) < 0, c'est-à-dire que f(a) et f(b) sont non nuls et de signes opposés. Alors il existe $\overline{x} \in]a,b[$ tel que $f(\overline{x}) = 0$. Si de plus f est strictement monotone, alors \overline{x} est unique.

Corollaire 14.1.2 théorème de point fixe : Soit $g : [a,b] \to [a,b]$ continue sur [a,b]. Alors g admet un point fixe \overline{x} dans l'intervalle [a,b].

Définition 14.1.3 *Une fonction* $g:[a,b] \to \mathbb{R}$ *est dite contractante s'il existe* $0 < \eta < 1$ *tel que pour tout* $x,y \in [a,b]$ *, on ait* $|g(x) - g(y)| \le |x-y|$.

Théorème 14.1.2 Soit $g:[a,b] \to [a,b]$ une fonction contractante. Alors, la suite x_n définie par $x_0 \in [a,b]$, $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers l'unique point fixe de g dans [a,b].

14.1.2 Schéma et solutions approchées du point fixe

Il existe trois sources d'erreurs qui conduisent à utiliser le schéma approché.

- 1. le modèle mathématique étudié, représenté dans notre cas par la fonction f peut dépendre des paramètres qui sont des résultats de données expérimentales, de mesures faites avec une précision finie ou de calculs approchés.
- 2. les erreurs d'arrondis dues à certaines arithmétiques utilisées par les ordinateurs.
- 3. les erreurs d'approximation et de troncature : après un nombre fini d'étapes, les processus limites sont arrêtés et les fonctions transcendantes sont remplacées par des approximations.

Au lieu de considérer le schéma classique $x_{n+1}=g\left(x_n\right)$ pour le calcul du point fixe x de f, le calcul de x_{n+1} est fait avec une erreur $\varepsilon>0$ tel que :

$$d\left(x_{n+1}, g\left(x_n\right)\right) \le \varepsilon \tag{14.1}$$

Il y a toujours une possibilité que les trois erreurs puissent se présenter simultanément ce qui conduit à utiliser le schéma itératif. Des études plus approfondies ont été développées pour des problèmes non linéaires par [Chaitin-Chatelin et Frayssé 1996] et par [Higham 2002] pour l'algèbre linéaire.

Le schéma étudié est présenté suivant l'algorithme 14.1.

Algorithme 14.1 Algorithme du point fixe.

```
1: Entrées : x_0 \in \mathbb{R}^N, \varepsilon > 0

2: tant que |x_{n+1} - x_n| \ge \varepsilon faire

3: Calcul de x_{n+1} = g(x_n)

4: Incrémentation n = n + 1

5: fin tant que

6: Retourner x_{n+1}
```

14.1.3 Étude de convergence

Pour mesurer la rapidité avec laquelle les suites vont converger vers le point fixe, on a besoin de présenter quelques outils. On définit par $e_n=x_n-x_*$, l'erreur de l'approximation, où x_* est le minimum et x_n l'estimation à l'itération n. La vitesse de convergence désigne la vitesse de décroissance vers 0 de l'erreur e_n . On définit comme ordre de convergence de la suite e_n vers 0, le plus grand p>0 tel qu'il existe une limite finie α avec :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^p} \le \alpha \tag{14.2}$$

On distingue différents cas :

- 1. Convergence linéaire ou géométrique de taux α si p=1 et $\alpha<1$.
- 2. Convergence superlinéaire si p=1 et $\alpha=0$.
- 3. Convergence quadratique si p=2.

Le comportement de la méthode dépend de x_0 , comment choisir ce point garantissant la convergence?

Définition 14.1.4 Le bassin d'attraction d'un point fixe \overline{x} de g est l'ensemble des points x_0 pour lesquels la méthode converge vers \overline{x} .

Idéalement, le point de départ est choisi dans le bassin d'attraction. Les points fixes sont caractérisés à l'aide de la relation entre le bassin et la dérivée de g.

- 1. Si 0 < |g'(x)| < 1, le point fixe est dit attractif.
- 2. Si |g'(x)| > 1, le point fixe est dit répulsif.
- 3. Si g'(x) = 1, le point fixe est indéterminé, on ne peut rien dire.

Les méthodes que nous allons voir ensuite (les méthodes de Newton) fonctionnent toutes sur un principe commun qui est réinterpréter l'équation f(x) = 0 comme un problème du point fixe g(x) = x, pour une certaine fonction g. Le choix pour la fonction g va entraı̂ner l'existence de ces différentes méthodes.

14.1.4 Avantages et inconvénients

La méthode de point fixe se caractérise par sa robustesse et sa simplicité lors de l'implémentation, par contre elle a une vitesse de convergence lente , vu qu'elle est seulement linéaire et le facteur de convergence est faible généralement.

14.2 Newton-Raphson

Cette méthode a été exposée par Isaac Newton (1643 - 1727) et apparaît dans un contexte très général dans "De analysis per aequationes numero terminorum infinitas" de 1669, où Newton considère des équations polynomiales et utilise une technique de linéarisation. En 1687, il a publié un ouvrage intitulé "Philosophiae naturalis paricipia mathematicia", où il a décrit le cas de l'équation de Kepler connue sous la forme $x-e\sin(x)=M$ qui n'est pas polynomiale. Vu qu'il n'est plus possible de linéariser cette méthode par des techniques algébriques, Joseph Raphson (1648 - 1715) a présenté une nouvelle méthode de résolution des équations polynomiales dans son ouvrage "Analysis aequationum universalis" en 1690. Puis vient Simpson (1710 - 1761) qui a introduit dans son essai "Essays in Mathematicks", la méthode des fluxions c'est-à-dire les dérivées en 1740. Les premières preuves de convergence ont été développé par J. R. Mouraille (1721 - 1808) en 1768, puis J. Fourier et A. Cauchy pour le cas des fonctions d'une variable.

L. Kantorovich (1912 - 1986) et A. Ostrowski (1893 - 1986) qui sont parmi les plus grands noms de l'analyse numérique, ont apporté des résultats précis sur la convergence de la méthode de Newton. Sans oublier S. Smale, le dernier des grands noms associés à la méthode de Newton qui a introduit la "théorie alpha" qui est apparue très récemment, au cours des années 1980-1990. Pour plus d'informations, l'histoire de la méthode de Newton est détaillée dans [Ypma 1995].

14.2.1 Description de la méthode

Cette méthode consiste à linéariser le problème non linéaire à partir des valeurs approchées de la solution et construire une suite convergente vers la solution [Dembo,Steihaug1983]. Si l'estimation de départ est dans le bassin de convergence, la méthode de Newton-Raphson converge en général rapidement vers la solution cherchée sinon elle diverge à cause de la direction et la longueur du pas qui sont peu fiables [Kuczmann 2010].

Soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I. Pour une équation f(x) = 0, la méthode de Newton est fondée sur l'étude de la suite :

$$d_n = -f'(x_n)^{-1} f(x_n), \ x_{n+1} = x_n + d_n, \ \forall x_0 \in I$$
 (14.3)

Définition 14.2.1 *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, d un vecteur non nul $de \mathbb{R}^n$ est dit une direction de descente, s'il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $\alpha \in]0, \lambda[$, on a $f(x + \alpha d) < f(x)$.

La méthode de Newton correspond à $d_n = -G(x_n)$. $f'(x_n)$. d_n est une direction de descente si la matrice Hessienne $G(x_n)$ est définie positive.

L'algorithme de Newton multidimensionnel est donné dans l'algorithme 14.2.

Algorithme 14.2 Algorithme de Newton.

```
1: Entrées : x_0 \in \mathbb{R}^N, \varepsilon > 0

2: pour n \to n+1 faire

3: tant que \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > \varepsilon faire

4: Résoudre d_n = -[f'(x_n)]^{-1} f(x_n)

5: Actualisation x_{n+1} = x_n + d_n

6: Calcul de résidu f(x_{n+1})

7: fin tant que

8: fin pour

9: Retourner x_{n+1}
```

Chaque itération de cet algorithme demande l'évaluation de la matrice Jacobienne $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_i} \end{bmatrix}$ et la résolution d'un système linéaire impliquant la matrice Jacobienne qui peut être mal conditionnée [Kelley 2003].

14.2.2 Étude de la convergence

Théorème 14.2.1 Soit $f: \Omega \to E$, une application de classe C^2 , où E est un espace vectoriel normé complet et Ω un ouvert de E. Si f(x) = 0 a une solution $x_* \in \Omega$, alors il existe un voisinage B de x_* tel que pour tout $x_0 \in B$, alors la suite x_n générée par :

$$x_{n+1} = x_n - f'(x_n)^{-1} f(x_n), \ n = 0, 1, 2, \dots$$

existe et converge vers x_* . En outre, il existe un nombre réel C>1 tel que pour tout $n\leq 0$:

$$|x_n - x_*| \le C^{-2n}$$

14.2.3 Exemple magnétostatique

Le problème adopté pour tous les exemples numériques présentés dans ce chapitre est le problème magnétostatique non linéaire en potentiel vecteur **A**. Il s'agit de résoudre :

$$\mathbf{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathbf{rot}\mathbf{A}\right) = \mathbf{J} \tag{14.4}$$

La figure 14.2 présente le domaine d'étude de cet exemple 2D inspiré d'un Workshop T.E.A.M 13 [Nakata et al 1995].

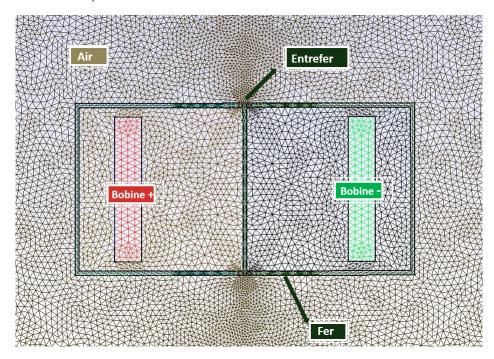


Figure 14.2 – Maillage du problème magnétostatique non linéaire (TEAM13).

Il est constitué de deux noyaux ferromagnétiques en forme de "U" disposés symétriquement sur les deux côtés d'une troisième plaque centrale qui est entourée par une bobine de courant continu, ce qui fait quatre entrefers. Comme les plaques ont des propriétés ferromagnétiques non linéaires, le point mesuré de la courbe B - H représenté dans la figure 14.3 est pris selon le modèle de Marrocco.

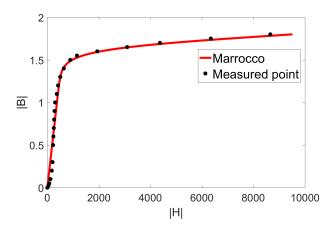


Figure 14.3 – Loi de comportement du matériau ferromagnétique (TEAM13).

Les caractéristiques des différents domaines physiques sont :

- Air : perméabilité magnétique $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} H.m^{-1}$;
- Fer : perméabilité non linéaire $\mu(B)$;
- Bobines : les forces magnétomotrices de la bobine d'excitation sont de 1000 At et 3000 At, ce qui est suffisant pour saturer les plaques.

Différentes finesses de maillages sont adoptés pour ce problème comme décrit dans le tableau 14.1.

Maillages	Maillage 1	Maillage 2	Maillage 3
Nombre d'éléments	7 122	28 488	113 952
Nombre de noeuds	1207	4828	19 313

Tableau 14.1 – Informations sur les maillages utilisés.

La méthode de Newton classique est testée pour différentes finesses de maillages et différentes valeurs de courant (500, 1000, 2000 et 3000 At) avec le point de départ classique $\mathbf{A} = 0$.

Les résultats de convergence sont résumés dans le tableau 14.2.

Cou	rant	Maillage 1	Maillage 2	Maillage 3
500	At	5	8	10
1000) At	9	Diverge	Diverge
2000) At	Diverge	Diverge	Diverge
3000) At	Diverge	Diverge	Diverge

Tableau 14.2 – Résultat de convergence pour différents maillages (TEAM13)

On remarque que la méthode de Newton diverge dès que la taille du système devient de plus en plus élevée et dès que la forte saturation apparaît.

14.2.4 Avantages et inconvénients

L'avantage majeur de la méthode de Newton par rapport à une méthode de point fixe est sa vitesse de convergence d'ordre 2. Cette convergence reste toujours locale.

On peut d'ailleurs remarquer que si la méthode ne converge pas, par exemple si l'estimation initial x_0 n'a pas été choisie dans le bassin de convergence, alors la méthode peut diverger très vite.

L'inconvénient majeur de la méthode de Newton est son coût : l'évaluation de la matrice Jacobienne est demandée à chaque itération, d'une part, et, d'autre part la résolution de systèmes linéaires $f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)=-f(x_n)$ implique la matrice Jacobienne qui peut être mal conditionnée.

Remarque 14.2.1 On rappelle que pour résoudre un système linéaire, on ne calcule pas l'inverse de la matrice, mais plutôt on la factorise sous la forme LU par exemple, ensuite on calcule les solutions des systèmes avec des matrices triangulaires.

14.3 Résolution du problème non linéaire dans code_Carmel temporel

On rappelle que le problème générique discrétisé en temps s'écrit :

Trouver $\mathbf{X}^{k}\left(t\right)\in\mathbb{R}^{N}$ tel que :

$$\left(\frac{\mathbf{K}}{\tau} + \mathbf{M}_{\theta}(\theta) + \mathbf{M}(\mathbf{X}^{k})\right) \mathbf{X}^{k} = \mathbf{C} \mathbf{U}^{k} + \frac{\mathbf{K}}{\tau} \mathbf{X}^{k-1}, \ k = 1, ..., N^{t}$$
(9.70)

et trouver $(\theta^{k+1}, \Omega^{k+1}) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\begin{cases}
\Omega^{k+1} = \left(1 - \frac{\tau f_M}{J_M}\right) \Omega^k + \frac{\tau}{J_M} \left(\Gamma_B \left(\mathbf{X}^k\right) + \Gamma_M\right) \\
\theta^{k+1} = \theta^k + \tau \Omega^{k+1}
\end{cases}, k = 0, ..., N_t - 1$$
(9.71)

Au pas de temps t^k , l'équation 9.70 définit un système d'équations non linéaires du fait de l'opérateur $\mathbf{M}\left(\mathbf{X}^k\right)$. Or un problème non linéaire est difficilement soluble de façon directe avec un calculateur numérique. On peut alors utiliser une méthode d'approximation telle que celle du point fixe de Banach ou de Newton-Raphson. Ces deux approches itératives consistent à transformer le problème non linéaire 9.70 de solution \mathbf{X}^k en une suite de problèmes linéaire (\mathcal{P}_j) , ayant pour solution \mathbf{X}^k . Sous certaines conditions, ces approches convergent de sorte qu'on obtient :

$$\|\mathbf{X}^k - \mathbf{X}_j^k\| \underset{i \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{14.5}$$

En pratique, on espère que le nombre d'itérations non linéaires N_{nl} ne soit pas supérieur à une cinquantaine, afin d'offrir des temps de calcul raisonnables.

Pour évaluer la qualité de l'approximation \mathbf{X}_{j}^{k} , le vecteur résidu $R\left(\mathbf{X}_{j}^{k}\right)$ est utilisé. C'est en réalité une image de l'erreur qui a généralement le même comportement que celle-ci, mais avec des ordres de grandeur différents. Il s'obtient simplement en réinjectant l'approximation dans le problème initial 9.70. Ainsi le vecteur résidu s'écrit :

$$\mathbf{R}\left(\mathbf{X}_{j}^{k}\right) = \left(\frac{\mathbf{K}}{\tau} + \mathbf{M}_{\theta}\left(\theta^{k}\right) + \mathbf{M}\left(\mathbf{X}_{j}^{k}\right)\right) \mathbf{X}_{j}^{k} - \mathbf{C}\mathbf{U}^{k} - \frac{\mathbf{K}}{\tau}\mathbf{X}^{k-1}$$
(14.6)

En pratique l'utilisateur choisit un critère d'erreur $\epsilon_{nl}>0$ et considère que l'algorithme a convergé lorsque :

$$\|\mathbf{R}\left(\mathbf{X}_{i}^{k}\right)\| < \epsilon_{nl} \tag{14.7}$$

Dans ce cas, on définit :

$$\mathbf{X}^k = \mathbf{X}_i^k \tag{14.8}$$

et on s'intéresse alors au pas de temps suivant. Nous allons donc détailler les deux problèmes linéaires 14.9 et 14.12 qu'il faut résoudre avec les méthodes du point fixe et de Newton respectivement.

14.3.1 Résolution numérique par la méthode du point fixe

La méthode du pont fixe consiste à transformer le problème non linéaire initial en une suite de problèmes linéaires 14.9 définis par :

Trouver $\mathbf{X}_{i}^{k}\left(t\right) \in \mathbb{R}^{N}$ tel que :

$$\left(\frac{\mathbf{K}}{\tau} + \mathbf{M}_{\theta} \left(\theta^{k}\right) + \mathbf{M} \left(\mathbf{X}_{j-1}^{k}\right)\right) \mathbf{X}_{j}^{k} = \mathbf{C} \mathbf{U}^{k} + \frac{\mathbf{K}}{\tau} \mathbf{X}^{k-1}$$
(14.9)

L'algorithme itératif du point fixe est présenté ci-dessous :

Algorithme 14.3 Algorithme du point fixe.

```
1: Données: Un vecteur initial \mathbf{X}_{0}^{k}. Typiquement on prend \mathbf{X}^{k-1} ou le vecteur nul.

2: Résultat: Le vecteur solution \mathbf{X}^{k}.

3: Initialisation de j=1 et de \eta=\epsilon+1;

4: tant que j < N_{nl}^{max} et \eta > \epsilon faire

5: Calcul de \mathbf{X}_{j}^{k}, solution de 14.9;

6: Calcul de l'erreur associée à \mathbf{X}_{j}^{k}: \eta_{j}^{k} = \|\mathbf{R}\left(\mathbf{X}_{j}^{k}\right)\|;

7: Incrémentation: j:=j+1

8: fin tant que

9: Sauvegarde de la solution \mathbf{X}^{k} = \mathbf{X}_{j}^{k}
```

14.3.2 Résolution numérique par la méthode de Nexton-Raphson

Comme la méthode du point fixe, l'approche de Newton Raphson transforme le problème non linéaire initial en une suite d'équations linéaires 14.12. Ces derniers sont obtenus après un développement limité à l'ordre 1 de la fonctionnelle associée au résidu. En effet, celui-ci s'écrit à l'itération non linéaire j:

$$\mathbf{R}\left(\mathbf{X}_{j}^{k}\right) = \mathbf{R}\left(\mathbf{X}_{j-1}^{k}\right) + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}}\left(\mathbf{X}_{j-1}^{k}\right) \cdot \left(\mathbf{X}_{j}^{k} - \mathbf{X}_{j-1}^{k}\right) + o\left(\mathbf{X}_{j}^{k} - \mathbf{X}_{j-1}^{k}\right)$$
(14.10)

où $o\left(a\right)$ représente un terme négligeable devant a quand $\|a\|$ tend vers 0:

$$\frac{o(a)}{\|a\|} \xrightarrow{a \to 0} 0 \tag{14.11}$$

En supposant que $\|\Delta \mathbf{X}\| = \|\mathbf{X}_j^k - \mathbf{X}_{j-1}^k\|$ est suffisamment petit, le terme $o\left(\mathbf{X}_j^k - \mathbf{X}_{j-1}^k\right)$ devient négligeable devant les autres membres de l'équation. On parle alors d'approximation linéaire de la fonctionnelle associée au résidu. La méthode de Newton consiste alors à supposer que sous ces hypothèses de linéarités, $\mathbf{R}\left(\mathbf{X}_j^k\right)$ est nul. On peut ainsi définir le problème non linéaire de Newton à l'itération j:

Trouver
$$\mathbf{X}_{j}^{k} \in \mathbb{R}^{N}$$
 tel que :
$$\mathbf{X}_{j}^{k} = \mathbf{X}_{j-1}^{k} - \left[\mathbf{J}\left(\mathbf{X}_{j-1}^{k}\right)\right]^{-1} \mathbf{R}\left(\mathbf{X}_{j-1}^{k}\right)$$
(14.12)

où la jacobienne associée à $\mathbf{R}(.)$, $\mathbf{J}(.) = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}}(.) \in \mathbb{R}^{N \times N}$, est une matrice symétrique semi-définie positive. Son expression est détaillée en annexe $\mathbf{E}.2$.

Bien évidemment, la solution calculée \mathbf{X}_j^k ne donnera pas généralement un résidu $\mathbf{R}\left(\mathbf{X}_j^k\right)$ strictement nul. En effet, le problème 14.12 a été obtenu en supposant que la fonctionnelle \mathbf{R} était linéaire. Puisque cette hypothèse n'est qu'une approximation dans le cas général, le résidu n'est pas strictement nul et c'est pourquoi l'approche est itérative. L'algorithme de Newton-Raphson est présenté ci-dessous.

Algorithme 14.4 Algorithme de Newton-Raphson

```
1: Données : Un vecteur initial \mathbf{X}_0^k. Typiquement on prend \mathbf{X}^{k-1} ou le vecteur nul.

2: Résultat : Le vecteur solution \mathbf{X}^k.

3: Initialisation de j=1 et de \eta=\epsilon+1;

4: tant que j < N_{nl}^{max} et \eta > \epsilon faire

5: Calcul de \mathbf{X}_j^k, solution de 14.12;

6: Calcul de l'erreur associée à \mathbf{X}_j^k : \eta_j^k = \|\mathbf{R}\left(\mathbf{X}_j^k\right)\|;

7: Incrémentation : j:=j+1

8: fin tant que

9: Sauvegarde de la solution \mathbf{X}^k = \mathbf{X}_j^k
```

14.3.3 Schéma de résolution global

Dans la suite de cet exposé, on résout donc les schémas de Newton ou du point fixe associés au jeu d'équations 9.70 - 9.71. La figure 14.4 présente le schéma de résolution global du problème non linéaire 9.70 chaîné avec l'équation mécanique 9.71.

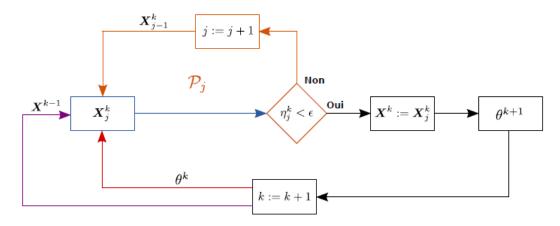


Figure 14.4 – Schéma de résolution global

14.3.4 Système matriciel en magnétostatique

14.3.4.1 Formulation en potentiel vecteur magnétique

On rappelle la forme faible de cette formulation

$$\forall \mathbf{w}_{i}^{1} \in \mathcal{W}_{\Gamma_{b}}^{1} \quad \sum_{a \in A} a_{a} \int_{\mathcal{D}} \nu \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{w}_{i}^{1} \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{w}_{a}^{1} d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{H}_{s} \cdot \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{w}_{i}^{1} d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{w}_{i}^{1} \cdot \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{B}_{r} d\mathcal{D} \quad (9.32)$$

Dans les possibilités actuelles de code_Carmel, seul le membre de droite dépend de A. On a donc à l'itération j :

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{A}}|_{j-1} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \left\{ \left[\int_{\mathcal{D}} \nu \, \mathbf{rotw}_{i}^{1} \mathbf{rotw}_{a}^{1} \, d\mathcal{D} \right] \, [\mathbf{A}] \right\}_{j-1}$$
(14.13)

Soit:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{A}}|_{j-1} = \int_{\mathcal{D}} \nu \, \mathbf{rotw}_{i}^{1} \mathbf{rotw}_{a}^{1} \, d\mathcal{D} + \left\{ \left[\int_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \nu \, \mathbf{rotw}_{i}^{1} \mathbf{rotw}_{a}^{1} \, d\mathcal{D} \right] \, [\mathbf{A}] \right\}_{j-1}$$
(14.14)

Le second terme de cette équation peut s'écrire :

$$\sum_{l=1}^{n_1} \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial A_a} \nu \operatorname{\mathbf{rotw}}_i^1 \operatorname{\mathbf{rotw}}_l^1 d\mathcal{D} A_l$$
 (14.15)

Dans code_Carmel, ν ne dépend que de ${\bf B}^2$. Or :

$$\mathbf{B} = \sum_{m=1}^{n_1} \mathbf{rot} \, \mathbf{w}_m^1 \, A_m$$

Par conséquent :

$$\|\mathbf{B}\|^2 = \sum_{p=1}^{n_1} \sum_{m=1}^{n_1} \mathbf{rot} \ \mathbf{w}_p^1 . \mathbf{rot} \ \mathbf{w}_m^1 A_p A_m$$

Ceci donne :

$$\frac{\partial \|\mathbf{B}\|^2}{\partial A_a} = 2 \sum_{m=1}^{n_1} \mathbf{rot} \ \mathbf{w}_a^1 . \mathbf{rot} \ \mathbf{w}_m^1 A_m$$

Ou encore:

$$\frac{\partial \|\mathbf{B}\|^2}{\partial A_j} = 2 \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{w}_a^1 . \sum_{m=1}^{n_1} \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{w}_m^1 A_m|_{j-1}$$

On obtient alors:

$$\sum_{l=1}^{n_1} \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial A_a} \nu \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{w}_i^1 \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{w}_l^1 d\mathcal{D} A_l = \sum_{l=1}^{n_1} \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \nu}{\partial B^2} \frac{\partial B^2}{\partial A_a} \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{w}_i^1 \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{w}_l^1 A_l d\mathcal{D}$$
(14.16)

Cette expression se transforme en :

$$\sum_{l=1}^{n_1} \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial A_l} \nu \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{w}_i^1 \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{w}_l^1 d\mathcal{D} A_l = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \nu}{\partial B^2} \sum_{l=1}^{n_1} \frac{\partial B^2}{\partial A_a} \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{w}_i^1 \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{w}_l^1 A_l d\mathcal{D}$$
(14.17)

Soit:

$$\sum_{l=1}^{n_1} \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial A_l} \nu \operatorname{rotw}_i^1 \operatorname{rotw}_l^1 d\mathcal{D} A_l =$$

$$2 \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \nu}{\partial B^2} \sum_{l=1}^{n_1} \left[\left\{ \operatorname{rotw}_a^1 \cdot \sum_{m=1}^{n_1} \operatorname{rotw}_m^1 A_m|_{j-1} \right\} \left\{ \operatorname{rotw}_i^1 \operatorname{rotw}_l^1 A_l|_{j-1} \right\} \right] d\mathcal{D} \quad (14.18)$$

Pour finir, l'expression s'écrit :

$$\sum_{l=1}^{n_1} \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial A_l} \nu \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{w}_i^1 \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{w}_l^1 d\mathcal{D} A_l =$$

$$2 \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \nu}{\partial B^2} \left\{ \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{w}_a^1 \cdot \sum_{m=1}^{n_1} \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{w}_m^1 A_m|_{j-1} \right\} \left\{ \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{w}_i^1 \cdot \sum_{l=1}^{n_1} \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{w}_l^1 A_l|_{j-1} \right\} d\mathcal{D} \quad (14.19)$$

Les expressions précédentes s'écrivent sous forme matricielle.

SALineaire =
$$\left[\int_{\mathcal{D}} \nu \operatorname{\mathbf{rotw}}_{i}^{1} \operatorname{\mathbf{rotw}}_{a}^{1} d\mathcal{D} \right] \begin{array}{c} 1 \leq i \leq n_{1} \\ 1 < a < n_{1} \end{array}$$
(14.20)

On pose:

$$\operatorname{rotRotX2D}|a = \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{w}_{a}^{1} \cdot \sum_{m=1}^{n_{1}} \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{w}_{m}^{1} A_{m}|_{j-1}$$
(14.21)

Le terme non-linéaire lié à la réluctivité (ou perméabilité magnétique) s'écrit :

$$SANonLineaire = \left[\int_{\mathcal{D}} 2.0 \, \frac{d\nu}{dB^2} \, \text{rotRotX2D} | a \, . \, \text{rotRotX2D} | i \, d\mathcal{D} \right] \, \underset{1 < a < n_1}{1 \leq i \leq n_1}$$
 (14.22)

Le système matriciel s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix}
\vdots \\
SALineaire + SANonLineaire \\
\vdots \\
A_{n_1}
\end{pmatrix} = ()$$

$$(14.23)$$

14.3.5 Système matriciel en magnétodynamique

14.3.5.1 Formulation en potentiel vecteur magnétique

La forme faible des équations discrétisées en temps est rappelée ci-dessous :

$$\begin{split} \int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{w'}_{a}^{1} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A}_{(i+1)} + \sigma \mathbf{w'}_{a}^{1} \cdot \left(\frac{\mathbf{A}_{(i+1)}}{\Delta t} + \mathbf{grad} \, \varphi_{(i+1)} \right) \right] d\mathcal{D} &= \int_{\mathcal{D}} \mathbf{J_{s}}_{(i+1)} \cdot \mathbf{w'}_{a}^{1} \, d\mathcal{D} \\ &+ \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{B_{r}} \cdot \mathbf{w'}_{a}^{1} \, d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{D}} \sigma \mathbf{w'}_{a}^{1} \, \frac{\mathbf{A}_{(i)}}{\Delta t} \, d\mathcal{D} \\ &\int_{\mathcal{D}} \sigma \, \mathbf{grad} w'_{n}^{0} \left(\frac{\mathbf{A}_{(i+1)}}{\Delta t} \mathbf{grad} \, \varphi_{(i+1)} \right) \, d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \sigma \, \mathbf{grad} w'_{n}^{0} \, \frac{\mathbf{A}_{(i)}}{\Delta t} \, d\mathcal{D} \end{split} \tag{9.52}$$

Ceci s'écrie sous forme matricielle en posant :

SALineaire =
$$\left[\int_{\mathcal{D}} \nu \operatorname{\mathbf{rotw}}_{i}^{1} \operatorname{\mathbf{rotw}}_{a}^{1} d\mathcal{D} \right] \begin{array}{c} 1 \leq i \leq n_{1} \\ 1 \leq a \leq n_{1} \end{array}$$
(14.24)

Le terme non-linéaire lié à la réluctivité (ou perméabilité magnétique) s'écrit :

SANonLineaire =
$$\left[\int_{\mathcal{D}} 2.0 \, \frac{d\nu}{dB} \, \mathbf{rotw}_{i}^{1} \mathbf{rotw}_{a}^{1} \, d\mathcal{D} \right] \, \underset{1 \leq a \leq n_{1}}{1 \leq i \leq n_{1}}$$
 (14.25)

La première matrice dynamique s'écrit :

$$SPhi = \left[\int_{\mathcal{D}} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} w_n^{\prime 0} \operatorname{\mathbf{grad}} w_n^0 d\mathcal{D} \right]$$
 (14.26)

La seconde matrice dynamique s'écrit :

$$CAPhi = \left[\int_{\mathcal{D}} \sigma \, \mathbf{w'}_{a}^{1} \, \mathbf{grad} \, w_{n}^{0} \, d\mathcal{D} \right]$$
 (14.27)

La troisième matrice dynamique s'écrit :

$$TA = \left[\int_{\mathcal{D}} \sigma \, \mathbf{w}'_{a}^{1} \mathbf{w}_{a}^{1} \, d\mathcal{D} \right] \tag{14.28}$$

Pour le second membre, nous avons :

$$CAi = \left[\int_{\mathcal{D}} \mathbf{J}_{\mathbf{s}(i+1)} \cdot \mathbf{w'}_{a}^{1} d\mathcal{D} \right]$$
 (14.29)

Si des inducteurs alimentés en tension existent, on ajoute une inconnue

A COMPLETER

Si il y a des aimants:

source2 =
$$\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{B_r} \cdot \mathbf{w'}_a^1 d\mathcal{D}$$
 (14.30)

Source3 A COMPLETER On introduit des termes sources en tension imposée sur un conducteur massif.

source4 =
$$\left[dt \int_{\mathcal{D}} \sigma \operatorname{\mathbf{grad}} w_n^{0} \operatorname{\mathbf{grad}} w_n^{0} V d\mathcal{D} \right]$$
 (14.31)

source5 =
$$\left[\int_{\mathcal{D}} \sigma \, \mathbf{w'}_{a}^{1} \, \mathbf{grad} \, w_{n}^{0} \, V \, d\mathcal{D} \right]$$
 (14.32)

Pour la prise en compte de sources magnétiques à flux imposé

source8 =
$$\left[\int_{\mathcal{D}} 2.0 \, \frac{d\nu}{dB} \, \mathbf{rotw}_{i}^{1} \mathbf{rotw}_{a}^{1} \, \mathbf{K} \, d\mathcal{D} \right] \, \underset{1 \leq j \leq n_{2}}{1 \leq i \leq n_{1}}$$
 (14.33)

source9 =
$$\left[\int_{\mathcal{D}} \sigma \, \mathbf{w'}_a^1 \mathbf{w}_a^1 \, d\mathcal{D} \right] \left(\mathbf{K} - \mathbf{K}_{prec} \right) / dt$$
 (14.34)

source10 =
$$\left[\int_{\mathcal{D}} \sigma \, \mathbf{w'}_{a}^{1} \, \mathbf{grad} \, w_{n}^{0} \, d\mathcal{D} \right] (\mathbf{K} - \mathbf{K}_{prec})$$
 (14.35)

14.4 Résolution du problème non linéaire dans code_Carmel spectral

Quatrième partie Résolution du système matriciel

Chapitre 15

Résolution du système linéaire

15.1 Généralités sur les systèmes linéaires

15.1.1 Coûts calculs des simulations en physique des champs

En simulation numérique de phénomènes physiques, un coût calcul important (RAM, disque, CPU) provient souvent de la construction et de la résolution de systèmes linéaires. La simulation en électromagnétisme n'échappe pas à la règle! Le coût de la construction du système dépend du nombre de points d'intégration et de la complexité des lois de comportement, tandis que celui de la résolution est lié au nombre d'inconnues, aux modélisations retenues et à la topologie. Lorsque le nombre d'inconnues explose, la seconde étape devient prépondérante et c'est donc cette dernière qui va principalement nous intéresser ici.

Remarque 15.1.1 D'ailleurs, lorsqu'il est possible d'être plus performant sur cette phase de résolution (en temps et en consommation RAM), grâce à l'accès à une machine parallèle, cet atout peut se propager jusqu'à la phase de constitution du système proprement dite (calculs élémentaires et assemblages) via le mode « parallèle distribué ». Pour ce faire, on distribue les calculs élémentaires et les blocs matriciels associés sur les processeurs. On peut par exemple adopter la distribution, naturelle en éléments finis, que chaque processeur est responsable d'un groupe d'éléments. C'est le principe qui sous-tend le parallélisme de certains codes développés à EDF, par exemple Code_Aster et Telemac. A l'avenir, il pourra être aussi décliné pour code_Carmel.

Remarque 15.1.2 Dans code_Carmel, même en linéaire, le coût de la phase de construction du système n'est pas négligeable (en temps et en mémoire) par rapport à la phase de résolution proprement dite. Cette étape de construction est en cours de refonte afin de revenir à une hiérarchie des coûts plus conventionnelle : passage à l'allocation dynamique, optimisation de la recherche du profil, limitation du nombre de boucles imbriquées dans la routine d'assemblage...

Ces inversions de systèmes linéaires sont en fait omniprésentes dans les codes de calcul de champs et souvent enfouies au plus profond d'autres algorithmes numériques : schéma non-linéaire, intégration en temps, analyse modale ... Ainsi dans code_Carmel, on cherche le plus souvent à calculer le vecteur d'inconnues ${\bf u}$ vérifiant un système linéaire symétrique réel 1 du type :

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \tag{15.1}$$

avec \mathbf{K} une matrice et \mathbf{f} un vecteur second membre.

De manière générale, la résolution de ce type de problème requiert un (plus) large questionnement qu'il n'y parait :

^{1.} En double précision si on utilise le solveur direct MUMPS ou le solveur itératif GCPC. En simple précision au niveau de l'étape de préconditionnement du GCPC si on utilise le préconditionneur MUMPS.

- A-t-on accès à la matrice ou connaît-t-on simplement son action sur un vecteur?
- Cette matrice est-elle creuse ou dense?
- Qu'elles sont ses propriétés numériques (symétrie, définie positivité, régularité...) et structurelles (réelle/complexe, par bandes, par blocs..)?
- Veut-on résoudre un seul système, plusieurs en simultané ² ou de manière consécutive ³? Voire plusieurs systèmes différents et successifs dont les matrices sont très proches ⁴?
- Dans le cas de résolutions successives, peut-on réutiliser des résultats précédents afin de faciliter les prochaines résolutions (cf. technique de redémarrage, factorisation partielle)?
- Quel est l'ordre de grandeur de la taille du problème, de la matrice et de sa factorisée par rapport aux capacités de traitements des processeurs et des mémoires associées (RAM, disque)?
- Veut-on une solution très précise ou simplement une estimation (cf. solveurs emboîtés)?
- A-t-on accès à des librairies d'algèbres linéaires (et à leurs pré-requis MPI, BLAS, LA-PACK...), doit-on faire appel à des produits « maison » ou les deux en éventuelle complémentarité?

Dans code_Carmel, on construit explicitement la matrice, on la stocke au format CSR ⁵ et on la gère complètement en RAM (pas de déchargement disque). Avec la plupart des modélisations, la matrice est creuse (discrétisation par éléments finis), plus ou moins bien conditionnée (car parfois numériquement singulière du fait de modélisations non jaugées) et, pour l'instant, essentiellement symétrique réelle double précision. De plus, elle n'offre pour l'instant aucune structure particulière (blocs, bandes ...) sur laquelle on aurait pu baser des traitements optimisés.

La plupart des résolutions sont "one-shot", c'est-à-dire qu'on change de matrice et de second membre à chaque fois. Sauf en non linéaire, où pour gagner du temps, on peut conserver la même matrice tangente au sein de plusieurs itérations de Newton (suivant les valeurs du nouveau paramètre reacprecond_methodeNL cf. paragraphe J.3.1). On se place alors résolument dans le cadre d'une stratégie de type multiples seconds membres. Quant aux tailles des problèmes, même si elles enflent d'année en année, elles restent modestes par rapport à la CFD : au maximum de l'ordre de quelques millions d'inconnues.

Par ailleurs, d'un point de vue fonctionnel, le code s'appuie maintenant potentiellement ⁶ sur quelques librairies ⁷ optimisées et pérennes (BLAS, MUMPS et ses dépendances) et s'utilise aussi bien sur des machines de bureau multi-cœurs que sur des clusters de calcul. On cherche donc à optimiser l'utilisation des solveurs linéaires et non-linéaires dans cette optique, tout en ménageant à la fois un usage « presse-bouton » (formation, étude standard, prototypage en électrotechnique) et un usage « avancé » (expertise numérique, calcul difficile ou trop gros).

Remarque 15.1.3 Les besoins de code_Carmel en termes de solveurs linéaires sont complémentaires de ceux de code_Aster : exigence AQ, facilité de prototypage, physiques traitées. Loin de nous desservir, cette complémentarité enrichit d'autant notre Retour d'EXpérience (REX) sur le produit et notre crédibilité externe sur ces sujets.

^{2.} Même matrice mais plusieurs seconds membres indépendants; Cf. construction d'un complément de Schur.

^{3.} Problème de type multiples seconds membres : même matrice mais plusieurs seconds membres successifs et interdépendants ; Cf. algorithme de Newton sans réactualisation de la matrice tangente.

^{4.} Problème de type multiples premiers membres : plusieurs matrices et seconds membres successifs et interdépendants, mais avec des matrices « spectralement » proches ; Cf. algorithme de Newton avec réactualisation de la matrice tangente.

^{5.} Compressed Sparse Row comme dans Code_Aster (appelé aussi format MORSE). Les codes TELEMAC et Code_Saturne ont eux choisi parfois d'autres stratégies : format de stockage matriciels optimisés en mémoire et adaptés pour le produit matrice-vecteur, non-assemblage de la matrice globale, non-recours à un élément fini de référence, intégration des termes élémentaires par voie analytique ...

^{6.} Suivant les valeurs des options de pré-compilation USE_MUMPS et USE_BLAS (cf. paragraphe 6 [Boiteau 2014]).

^{7.} Pour une analyse plus détaillée des librairies d'algèbres linéaires voir le paragraphe

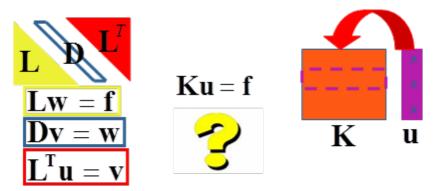


Figure 15.1 – Deux classes de méthodes pour résoudre un système linéaire du type \mathbf{K} $\mathbf{u} = \mathbf{f}$: les directes et les itératives

15.1.2 Deux familles de méthodes pour résoudre un système linéaire

Depuis 60 ans, deux types de techniques se disputent la suprématie dans le domaine, les solveurs linéaires directs et ceux itératifs. Les premiers sont robustes, ergonomiques et universels et ils aboutissent en un nombre fini d'opérations (théoriquement) connu par avance. Leur théorie est relativement bien achevée et leur déclinaison suivant moult types de matrices et d'architectures logicielles est très complète. En particulier, leur algorithmique multiniveaux est bien adaptée aux hiérarchies mémoires des machines actuelles. Cependant, ils requièrent des capacités de stockage qui croissent rapidement avec la taille du problème ce qui limite l'extensibilité de leur parallélisme 8. Même si ce parallélisme peut se décomposer en plusieurs strates indépendantes, démultipliant ainsi les performances. En revanche, les méthodes itératives sont plus "scalables" lorsque l'on augmente le nombre de processeurs⁹. Elles consomment peu de mémoire¹⁰ mais leur mise en œuvre est souvent "problème-dépendant". Leur théorie regorge de nombreux "problèmes ouverts", surtout en arithmétique finie. En pratique, leur convergence en un nombre "raisonnable" d'itérations, n'est pas toujours acquise, elle dépend de la structure de la matrice, du point de départ, du critère d'arrêt ... D'autre part, elles ne sont pas bien adaptées pour résoudre efficacement les problèmes de type "multiples seconds membres". Donc, contrairement à leurs homologues directs, il n'est pas possible de proposer LE solveur itératif qui va résoudre n'importe quel système linéaire. L'adéquation du type d'algorithme à une classe de problèmes se fait au cas par cas. Ils présentent, néanmoins, d'autres avantages qui historiquement leur ont donné droit de citer pour certaines applications. A gestion mémoire équivalente, ils en requièrent moins que les solveurs directs, car on a juste besoin de connaître l'action de la matrice sur un vecteur quelconque, sans devoir véritablement la stocker. D'autre part, on n'est pas soumis aux « diktats » du phénomène de remplissage qui détériore le profil des matrices, on peut exploiter efficacement le caractère creux des opérateurs et contrôler la précision des résultats ¹¹

Bref, l'utilisation de solveurs directs relève plutôt du domaine de la technique alors que le choix du bon couple méthode itérative/préconditionneur est plutôt un art! En dépit de sa simplicité biblique sur le papier, la résolution d'un système linéaire, même symétrique, n'est pas "un long fleuve tranquille". Entre deux maux, remplissage/pivotage et préconditionnement, il faut choisir!

^{8.} On parle aussi de "scalabilité" ou de passage à l'échelle.

^{9.} C'est le choix retenu par Code_Saturne, Syrthes, TELEMAC et les stratégies GCPC de code_Carmel et Code_Aster.

^{10.} En dehors des besoins de certains préconditionneurs.

^{11.} Ce qui peut être très intéressant dans le cadre de solveurs emboîtés (par ex. Newton + GCPC), cf. V.Frayssé. The power of backward error analysis. HDR de l'Institut National Polytechnique de Toulouse (2000).

15.1.3 Solutions proposées par code_Carmel

Cependant, les méthodes itératives fonctionnent plutôt bien dans code_Carmel. Le code dispose d'un gradient conjugué " maison ". Il peut être préconditionné (cf. paragraphe 15.2.2.3) par un Crout incomplet mono-niveau ILU(0) (paramètre TypeSolveurLineaire=1, cf. paragraphe 15.2.3.2) ou par un simple Jacobi (TypeSolveurLineaire=2, cf. paragraphe 15.2.3.1). Cependant, sa robustesse est parfois mise en défaut et on peut avoir besoin d'un autre type de solveur pour corroborer ses résultats.

C'est pourquoi nous avons introduit le solveur direct MUMPS. Ce produit peut servir à la fois de :

- Solveur linéaire de référence : coûteux mais très riche numériquement (TypeSolveurLineaire
 4, cf. paragraphe 15.3.6).
- *Outil d'expertise* : analyse de la singularité et du conditionnement, outils numériques facilement pilotables (cf. paragraphe 15.3.5.3).
- Brique élémentaire flexible (cf. paragraphe 15.4): pour construire un préconditionneur (TypeSolveurLineaire=3, cf. paragraphe 15.2.3.3; En précision simple et éventuellement en relaxant des termes via mumps_relax) ou pour optimiser le couplage solveur non linéaire-solveur linéaire (mutualisation de l'étape de factorisation via reacprecond_methodeNL, cf. paragraphe J.3).
- Futur vecteur de parallélisme dans le code : parallélisme centralisé/distribué via MPI avec éventuellement des BLAS threadées (cf. paragraphe 15.3.5.2).

D'autres codes tels Code_Aster sont moins chanceux avec les solveurs itératifs. Ce dernier, du fait de ses mélanges de modélisations, de ses caractéristiques matériaux très dissemblables et de ses problèmes de type points selle, a souvent besoin de préconditionneurs plus sophistiqués et plus coûteux pour assurer un fonctionnement relativement robuste (MUMPS simple précision non relaxé, méthode multigrille adaptée).

Dans TELEMAC, Syrthes et Code_Saturne, l'organisation du flot de données et l'algorithmique externe sont "tunées" pour tirer un maximum profit des solveurs itératifs de type GCPC. Quelques fois, cependant, au prix de contraintes dans la mise en données, dans la développabilité/maintenance du code et avec des restrictions dans le choix des méthodes d'analyses ¹².

Remarque 15.1.4 Une troisième classe de méthodes essaie de tirer parti des avantages respectifs des directes et des itératives. Suivant le contexte, on les désigne sous le vocable "méthode hybride" (HIPS, MaPhyS...) ou "méthodes de Décomposition de Domaine (DD" (FETI, Neumann-Neumann...).

Remarque 15.1.5 Les deux grandes familles de méthodes doivent plus être vues comme complémentaires que comme concurrentes. On cherche souvent à les mixer : méthodes DD, préconditionneur par factorisation incomplète ou de type multigrille, procédure de raffinement itératif en fin de solveur direct ...

15.2 Méthodes itératives de type Gradient Conjugué (GC)

15.2.1 Le principe

15.2.1.1 Positionnement du problème

Il existe toute une kyrielle de méthodes itératives pour résoudre un système linéaire. Mais en pratique, celles que l'on utilise le plus communément sont :

— Les méthodes stationnaires : Richardson, Jacobi, Gauss-Seidel, SSOR ...

^{12.} Afin par exemple de limiter les communications MPI et les détériorations de conditionnement du système matriciel.

— Les méthodes de Krylov: GC, GMRES, BiCGStab, Orthomin ...

Nous allons détailler ici *la deuxième famille* qui est celle utilisée effectivement dans code_Carmel (TypeSolveurLineaire = 1, 2 ou 3). Plus particulièrement l'algorithme du gradient conjugué (GC). Cet algorithme mis au point par Hestenes et Steifel (1951) fut classé troisième au "top 10" des meilleurs algorithmes numériques du XXième siècle ¹³.

Dans code_Carmel, les méthodes de la première famille sont utilisées en complément pour construire un préconditionneur (préconditionneur de Jacobi avec TypeSolveurLineaire=2). Tout comme les factorisations "plus ou moins complètes" construites par des solveurs directs (cf. préconditionneur ILU(0) et préconditionneur MUMPS avec, respectivement, TypeSolveurLineaire=1 et 3).

Lorsque la matrice \mathbf{K} du système à résoudre (cf. équation 15.1) a le "bon goût" d'être symétrique définie positive (SPD dans la littérature anglo-saxonne), on montre, par simple dérivation, que le problème initial :

$$(P_1) \quad \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \tag{15.2}$$

peut aussi se formaliser comme la minimisation d'une fonctionnelle quadratique de la forme :

$$(P_2) \quad \mathbf{u} = \underset{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{Argmin}} J(\mathbf{v}) \tag{15.3}$$

avec :
$$J(\mathbf{v}) := \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{K} \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} - \mathbf{f}^T \mathbf{v}$$

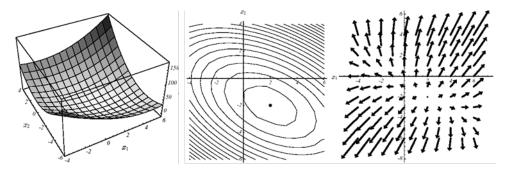


Figure 15.2 – Exemple de J quadratique en N=2 dimensions

La figure ci-dessus fournit un exemple de J quadratique en N=2 dimensions avec :

$$\mathbf{K} := \left[\begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{array} \right]$$

et:

$$\mathbf{K} := \left[\begin{array}{c} 2 \\ -8 \end{array} \right]$$

A gauche est présenté le graphe de la fonctionnelle, au centre, ses lignes de niveaux et, à droite, les vecteurs gradient.

Le spectre de l'opérateur est
$$(\lambda_1; \mathbf{v}_1) = (7; [1, 2]^T)$$
 et $(\lambda_2; \mathbf{v}_2) = (2; [-2, 1]^T)^{14}$.
Du fait de la "définie-positivité" de la matrice qui rend J strictement convexe, le vecteur

Du fait de la "définie-positivité" de la matrice qui rend J strictement convexe, le vecteur annulant ∇J correspond à l'unique minimum global \mathbf{u} . Cela s'illustre par la relation suivante, valable quelle que soit \mathbf{K} symétrique :

^{13.} B.A.Cipra. The Best of the 20th century: editors name top 10 algorithms. SIAM News, 33-4 (2000).

^{14.} Figures extraites du papier de J.R.Shewchuck, avec son aimable autorisation. An introduction to the GC without the agonizing pain. Carnegie Mellon University (1994).

$$J(\mathbf{v}) = J(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} (\mathbf{v} - \mathbf{u})^T \mathbf{K} (\mathbf{v} - \mathbf{u})$$
(15.4)

Ainsi, pour tout vecteur \mathbf{v} différent de la solution \mathbf{u} , le caractère défini positif de l'opérateur rend strictement positif le second terme et donc \mathbf{u} est aussi un minimum global.

Ce résultat très important en pratique s'appuie entièrement sur cette fameuse définie-positivité propriété un peu " éthérée" de la matrice de travail. Sur un problème à deux dimensions on peut s'en faire une représentation limpide (cf. figure 15.2): la forme paraboloïde qui focalise l'unique minimum au point $[2,-2]^T$ de pente nulle.

15.2.1.2 Steepest Descent

D'où l'idée qui sous-tend la classique méthode "de la plus forte pente", plus connue sous sa dénomination anglo-saxonne de 'Steepest Descent' : on construit la suite d'itérés \mathbf{u}^i en suivant la direction suivant laquelle J décroît le plus, du moins localement, c'est-à-dire :

$$\mathbf{d}^i = -\nabla J^i = \mathbf{r}^i$$

avec:

$$J^i := J\left(\mathbf{u}^i\right)$$

et:

$$\mathbf{r}^i := \mathbf{f} - \mathbf{K} \mathbf{u}^i$$

A la ième itération, on va donc chercher à construire \mathbf{u}^{i+1} tel que :

$$\mathbf{u}^{i+1} := \mathbf{u}^i + \alpha^i \, \mathbf{d}^i \tag{15.5}$$

et:

$$J^{i+1} < J^i \tag{15.6}$$

Grâce à cette formulation, on a donc transformé un problème de minimisation quadratique de taille N (en J et \mathbf{u}) en une minimisation unidimensionnelle (en G et α) :

Trouver
$$\alpha^{i}$$
 tel que $\alpha^{i} = \underset{\alpha \in [\alpha_{m}, \alpha_{M}]}{\operatorname{Argmin}} G^{i}(\alpha)$
avec $G^{i} := J(\mathbf{u}^{i} + \alpha \mathbf{r}^{i})$ (15.7)

Les figures ci-dessus illustrent le fonctionnement de cette procédure sur l'exemple n°1: partant du point $\mathbf{u}_0 = [-2,-2]^T$ (cf. (a)) on cherche le paramètre de descente optimal, α_0 , suivant la ligne de plus grande pente \mathbf{r}_0 ; ce qui revient à chercher un point appartenant à l'intersection d'un plan vertical et d'une paraboloïde (b), signifiée par la parabole (c). Trivialement ce point annule la dérivée de la parabole (d):

$$\frac{\partial G^{0}\left(\alpha^{0}\right)}{\partial \alpha} = 0 \Leftrightarrow \langle \nabla J\left(\mathbf{u}^{1}\right), \mathbf{d}^{0} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \mathbf{d}^{1}, \mathbf{d}^{0} \rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha^{0} := \frac{\|\mathbf{d}^{0}\|^{2}}{\langle \mathbf{d}^{0}, \mathbf{K} \, \mathbf{d}^{0} \rangle}$$
(15.8)

Cette orthogonalité entre deux résidus successifs (i.e. gradients successifs) produit un cheminement caractéristique, dit en "zigzag", vers la solution (e). Ainsi, dans le cas d'un système mal conditionné produisant des ellipses étroites et allongées ¹⁵, le nombre d'itérations requises peut être considérable (cf. figure 15.3).

^{15.} Le conditionnement de l'opérateur \mathbf{K} s'écrit comme le rapport de ses valeurs propres extrêmes $\eta(\mathbf{K}) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$ qui sont elles-mêmes proportionnelles aux axes des ellipses. D'où un lien direct et visuel entre mauvais conditionnement matriciel et vallée étroite et tortueuse où la minimisation est malmenée.

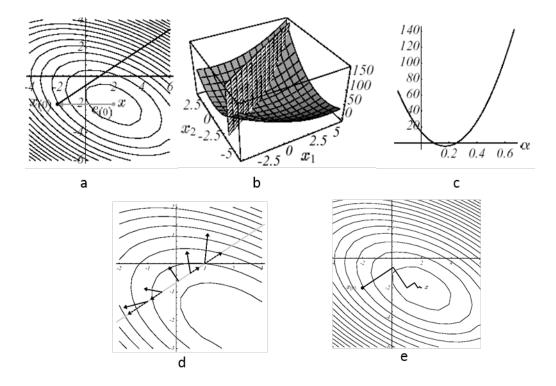


Figure 15.3 – Illustration de la Steepest Descent sur l'exemple n° 1 : direction de descente initiale (a), intersection de surfaces (b), parabole correspondante (c), vecteurs gradient et leur projection le long de la direction de descente initiale (d) et processus global jusqu'à la convergence (e).

15.2.1.3 Principe du Gradient Conjugué

Afin d'éviter ce cheminement peu optimal en zigzag, il a été développé tout un sous-ensemble de méthodes de descente dites "méthodes de directions conjuguées". L'algorithme du GC appartient à ce sous-ensemble de méthodes. Celles-ci préconisent de construire progressivement des directions de descentes \mathbf{d}^0 , \mathbf{d}^1 , \mathbf{d}^2 ... linéairement indépendantes de manière à éviter les zigzags de la méthode de descente classique.

Quelle combinaison linéaire alors préconiser pour construire, à l'étape i, la nouvelle direction de descente? Sachant bien sûr qu'elle doit tenir compte de deux informations cruciales : la valeur du gradient $\nabla J^i = -\mathbf{r}^i$ et celles des directions \mathbf{d}^0 , \mathbf{d}^1 , ... \mathbf{d}^{i-1} .

?
$$\mathbf{d}^i = \alpha_i \, \mathbf{r}^i + \sum_{j < i} \beta^j \, \mathbf{d}^j$$
 (15.9)

L'astuce consiste à choisir une indépendance vectorielle de type \mathbf{K} -orthogonalité (comme l'opérateur de travail est SPD, il définit bien un produit scalaire via lequel deux vecteurs peuvent être orthogonaux, cf. figure 3.1-4)

On peut donc se contenter d'une combinaison linéaire du type :

$$\mathbf{d}^i := \mathbf{r}^i + \beta^i \, \mathbf{d}^{i-1} \tag{15.10}$$

On montre ainsi que la recherche unidimensionnelle (cf. équation 15.7) s'opère dans un espace optimal : le plan formé par les deux directions orthogonales ($\mathbf{r}^i, \mathbf{d}^{i-1}$).

Il reste donc à déterminer la valeur optimale du coefficient de proportionnalité β^i . Dans le GC ce choix s'opère de manière à maximiser le facteur d'atténuation (rapport entre l'erreur à l'itération i-1 et celle à l'itération i, exprimée avec la norme matricielle associée à \mathbf{K}):

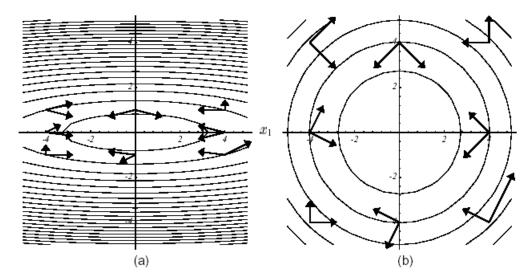


Figure 15.4 – Exemple de paires de vecteurs \mathbf{K} -orthogonaux en 2D : conditionnement de \mathbf{K} quelconque (a), conditionnement parfait (i.e. égal à l'unité) = orthogonalité usuelle (b).

$$\frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^i\|_{\mathbf{K}}^2}{\|\mathbf{u}^{i-1} - \mathbf{u}\|_{\mathbf{K}}^2} = \frac{\langle \mathbf{r}^i, \mathbf{d}^i \rangle^2}{\langle \mathbf{K}^{-1} \, \mathbf{r}^i \rangle \, \langle \mathbf{K}^{-1} \, \mathbf{d}^i, \mathbf{d}^i \rangle}$$
(15.11)

Il conduit à l'expression:

$$\beta^{i} := \frac{\|\mathbf{r}^{i}\|^{2}}{\|\mathbf{r}^{i-1}\|^{2}} \tag{15.12}$$

et induit la même propriété d'orthogonalité des résidus successifs que pour la Steepest Descent ($mais\ sans\ les\ zigzags\ !$) :

$$\langle \mathbf{r}^i, \mathbf{r}^{i-1} \rangle = 0 \tag{15.13}$$

Se rajoute une condition " résidu-dd " :

$$\langle \mathbf{r}^i, \mathbf{d}^i \rangle = \|\mathbf{r}^i\|^2 \tag{15.14}$$

qui impose d'initialiser le processus via :

$$\mathbf{d}^0 = \mathbf{r}^0$$

15.2.1.4 Algorithme du Gradient Conjugué

Bref, en récapitulant les relations précédentes il advient l'algorithme classique (3.1-1) cidessous.

Sur l'exemple n° 1, la "suprématie" du GC par rapport à la Steepest Descent est manifeste (cf. figure 15.5). Dans les deux cas, les mêmes points de départ et les mêmes critères d'arrêt ont été choisis : $\mathbf{u}^0 = [-2, -2]^T$ et $\|\mathbf{r}^i\|^2 < \varepsilon = 10^{-6}$.

Initialisation \mathbf{u}^0 donné, $\mathbf{r}^0 = \mathbf{f} - \mathbf{K} \mathbf{u}^0$, $\mathbf{d}^0 = \mathbf{r}^0$

Boucle en i

- $\mathbf{z}^i = \mathbf{K} \, \mathbf{d}^i$
- (2) $\alpha^i = \frac{\|\mathbf{r}^i\|^2}{\langle \mathbf{d}^i, \mathbf{z}^i \rangle}$ (paramètre optimal de descente)
- (3) $\mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^i + \alpha^i \, \mathbf{d}^i$ (nouvel itéré)
- (4) $\mathbf{r}^{i+1} = \mathbf{r}^i \alpha^i \mathbf{z}^i$ (nouveau résidu)
- (5) Test d'arrêt via $\|\mathbf{r}^{i+1}\|$ (par exemple)
- (6) $\beta^{i+1} = \frac{\|\mathbf{r}^{i+1}\|^2}{\|\mathbf{r}^i\|^2} \qquad \qquad \text{(paramètre de conjugaison optimal)}$
- (7) $\mathbf{d}^{i+1} = \mathbf{r}^{i+1} + \beta^{i+1} \, \mathbf{d}^{i} \qquad \text{(nouvelle direction de descente)}$

Tableau 15.1 – Algorithme du gradient conjugué (GC).

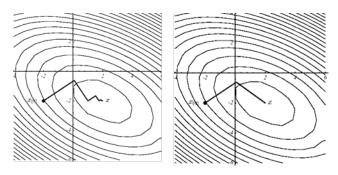


Figure 15.5 – Convergences comparées, sur l'exemple n $^\circ$ 1, de la Steepest Descent, à gauche, et du GC, à droite.

En pratique, on utilise souvent cet algorithme sur des systèmes non-nécessairement SPD voire singuliers. Cela peut être le cas de code_Carmel. La convergence s'en trouve alors ralentie et la robustesse du processus n'est pas garantie. Il peut diverger! Mais souvent, dans code_Carmel (comme dans Code_Carmel3D, TELEMAC, Syrthes ...), l'algorithme se comporte plutôt bien même lorsqu'il est "hors-périmètre". Surtout lorsqu'on s'efforce de lui fournir une matrice bien conditionnée (équation adimensionnée, pas de mailles aplaties ...) et un second membre respectant l'alternative de Fredholm ($\mathbf{f} \in Im(\mathbf{K})$).

Remarque 15.2.1 Cette méthode du GC a été développée en 1951 par M.R.Hestenes (photo de gauche) et E.Stiefel (photo de droite) du 'National Bureau of Standard' de Washington D.C. (pépinière de numériciens avec aussi C.Lanczos). Cf. portraits ci-contre.



Remarque 15.2.2 Les premiers résultats théoriques de convergence sont dus aux travaux de S.Kaniel (1966) et de H.A.Van der Vorst (1986) et elle a vraiment été popularisée pour la résolution de gros systèmes creux par J.K.Reid (1971). Le lecteur intéressé trouvera une histoire commentée et une bibliographie exhaustive sur le sujet dans les papiers de G.H.Golub, H.A Van

der Vorst et Y.Saad 16.

Remarque 15.2.3 Au test d'arrêt sur la norme du résidu, théoriquement licite mais en pratique parfois difficile à calibrer, on préfère souvent un critère d'arrêt adimensionnel, tel que le résidu relatif à la ième itération :

$$\delta^i := \frac{\|\mathbf{r}^i\|}{\|\mathbf{f}\|}$$

C'est ce qui est fait en particulier dans Code_Carmel(3D), Code_Aster et TELEMAC.

15.2.2 Le Gradient Conjugué PréConditionné (GCPC)

15.2.2.1 Principes

Comme on a pu le constater (et le marteler!) dans les paragraphes précédents, la rapidité de convergence du gradient conjugué, dépend du conditionnement de la matrice $\eta(\mathbf{K})$. Plus il est proche de sa valeur plancher, 1, meilleure est la convergence.

Le principe de préconditionnement est alors "posé", il consiste à remplacer le système linéaire du problème (P_1) (équation 15.1) par un système équivalent du type :

$$(\tilde{P}_1) \quad \underbrace{\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}}_{\tilde{\mathbf{K}}} \mathbf{u} = \underbrace{\mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}}_{\tilde{\mathbf{f}}}$$
(15.15)

tel que, idéalement :

- Le conditionnement en soit évidemment amélioré 17 : $\eta(\tilde{\mathbf{K}}) \ll \eta(\mathbf{K})$.
- Tout comme la distribution spectrale : valeurs propres plus tassées.
- \mathbf{M}^{-1} soit peu coûteux à évaluer (comme pour l'opérateur initial, on a souvent juste besoin de connaître l'action du préconditionneur sur un vecteur) : $\mathbf{M} \mathbf{v} = \mathbf{u}$ facile à inverser.
- \mathbf{M}^{-1} facile à implanter et, éventuellement, efficace à paralléliser.
- \mathbf{M}^{-1} soit assez creux car il s'agit de limiter l'encombrement mémoire supplémentaire.
- \mathbf{M}^{-1} conserve à la matrice de travail $\tilde{\mathbf{K}}$ les mêmes propriétés que celle initiale (ici, le caractère SPD).

En théorie, le meilleur choix serait $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{K}^{-1}$ car alors $\eta\left(\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{I_N}\right) = 1$, mais si il faut inverser complètement l'opérateur par une méthode directe pour construire ce préconditionneur, il n'est que de peu d'intérêt pratique!

Quoique, on verra par la suite que cette idée n'est pas aussi farfelue que cela (cf. préconditionneurs $\mathrm{ILU}(0)$ et MUMPS simple précision relaxé). Surtout lorsqu'on cherche à optimiser non seulement une résolution "one-shot" mais toute une succession de résolutions au sein d'un processus non linéaire.

Dit autrement, *l'objectif d'un préconditionneur est de tasser*, à moindre coût ¹⁸, le spectre de l'opérateur de travail. Ainsi, comme on l'a déjà mentionné, son "conditionnement effectif" sera amélioré de paire avec la convergence du GCPC.

Graphiquement, cela se traduit par une forme plus sphérique du graphe de la forme quadratique. Même sur un système à N=2 dimensions et avec un préconditionneur "fruste" (cf. figure 15.6), les effets sont notables.

Dans l'absolu, on peut préconditionner un système linéaire par la gauche ('left preconditioning'), par la droite (resp. 'right') ou en faisant un mélange des deux (resp. 'split'). C'est cette dernière

^{16.} Golub et al. Some history of the GC and Lanczos algorithms: 1948-1976. SIAM review, 31-1 (1989). Closer to the solution: iterative linear solvers. The state of the art in numerical analysis. Ed. Clarendon Press (1997). Y. Saad & H.A. Van Der Vorst. Iterative solution of linear system in the 20th-century. J. Comp. Appl. Math., 123 (2000).

^{17.} Cette propriété théorique, tout comme la suivante, ne sont que très rarement démontrées. Elles ne sont souvent cautionnées que par des expériences numériques.

^{18.} Mémoire, temps calcul, robustesse voire maintenance/ergonomie.

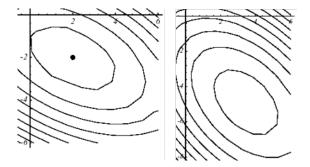


Figure 15.6 – Effet du préconditionnement diagonal (Jacobi) sur la paraboloïde de l'exemple n $^{\circ}$ 1 : à gauche, sans $\eta(\mathbf{K}) = 3.5$; à droite, avec $\eta(\tilde{\mathbf{K}}) = 2.8$

version qui va être retenue pour notre opérateur SPD, car on ne peut pas directement appliquer le GC pour résoudre (\tilde{P}_1) : même si \mathbf{M}^{-1} et \mathbf{K} sont SPD, ce n'est pas forcément le cas de leur produit.

L'astuce consiste alors à utiliser une matrice de préconditionnement SPD, \mathbf{M} , pour laquelle on va donc pouvoir définir une autre matrice (\mathbf{M} étant symétrique réelle, elle est diagonalisable sous la forme $\mathbf{M} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{U}^T$ avec $\mathbf{D} := \mathbf{diag}(\lambda_i)$, $\lambda_i > 0$ et \mathbf{U} matrice orthogonale). La matrice SPD recherchée provient alors de la décomposition associée $\mathbf{M}^{1/2} = \mathbf{U} \mathbf{diag}(\sqrt{\lambda_i}) \mathbf{U}^T$ avec $\mathbf{M}^{1/2}$ définie telle que $(\mathbf{M}^{1/2})^2 = \mathbf{M}$. D'où le nouveau problème, cette fois SPD :

$$\begin{pmatrix} \hat{P}_1 \end{pmatrix} \quad \underbrace{\mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1/2}}_{\hat{\mathbf{K}}} \quad \underbrace{\mathbf{M}^{1/2} \mathbf{u}}_{\hat{\mathbf{u}}} \quad = \quad \underbrace{\mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{f}}_{\hat{\mathbf{f}}}$$
(15.16)

sur lequel on va pouvoir appliquer l'algorithme standard du GC pour constituer ce qu'on appelle un Gradient Conjugue PréConditionné (GCPC).

15.2.2.2 Algorithme du GCPC

En substituant dans l'algorithme 15.1, les expressions du problème précédent (\hat{P}_1) et en travaillant un peu à la simplification du tout pour ne manipuler que des expressions en \mathbf{K} , \mathbf{u} et \mathbf{f} , il advient le déroulement suivant :

Mais en fait, le caractère symétrique du problème préconditionné initial (\hat{P}_1) est tout relatif. Il est indissociable du produit scalaire sous-jacent. Si, au lieu de prendre le produit scalaire euclidien usuel, on utilise un produit scalaire matriciel défini par rapport à K, M, M^{-1} , il est possible de symétriser le problème préconditionné qui ne l'était pas initialement. Comme pour les méthodes de Krylov en modal, c'est le couple (opérateur de travail, produit scalaire) qu'il faut moduler pour s'adapter au problème!

Ainsi, $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ étant symétrique par rapport au \mathbf{M} -produit scalaire, on peut substituer ce nouvel opérateur de travail et ce nouveau produit scalaire dans l'algorithme du GC non préconditionné (cf. algorithme 15.1):

$$\mathbf{K} \quad \Leftarrow \quad \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \\
\langle,\rangle \quad \Leftarrow \quad \langle,\rangle_{\mathbf{M}} \tag{15.17}$$

Et (Ô surprise!) en travaillant un peu les expressions, on retrouve exactement l'algorithme du GCPC précédent (cf algorithme 15.2). On procède de même avec un préconditionnement à droite, $\mathbf{K}\,\mathbf{M}^{-1}$, via un \mathbf{M}^{-1} -produit scalaire. Donc, préconditionnement à droite, à gauche ou "splitté à la mode SPD", conduisent tous rigoureusement au même algorithme. C'est cette constatation que l'on utilise lorsque les préconditionneurs ne sont pas conformes au scénario idéal (\hat{P}_1) : c'est exactement le cas de figure des préconditionneurs de code_Carmel et de Code_Aster.

 $\mathbf{u}_0 \operatorname{donn\acute{e}}, \mathbf{r}^0 = \mathbf{f} - \mathbf{K} \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{d}^0 = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}^0$ Initialisation Boucle en i

$$\mathbf{z}^i = \mathbf{K} \, \mathbf{d}^i$$

(2)
$$\alpha^{i} = \frac{\langle \mathbf{r}^{i}, \mathbf{g}^{i} \rangle}{\langle \mathbf{d}^{i}, \mathbf{z}^{i} \rangle}$$
 (paramètre optimal de descente)

(3)
$$\mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^i + \alpha^i \, \mathbf{d}^i$$
 (nouvel itéré)

(4)
$$\mathbf{r}^{i+1} = \mathbf{r}^i - \alpha^i \mathbf{z}^i \qquad \text{(nouveau résidu)}$$

(5) Test d'arrêt via
$$\|\mathbf{r}^{i+1}\|$$
 (par exemple)

(6)
$$\mathbf{g}^{i+1} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}^{i+1}$$
 (résidu préconditionné)

(7)
$$\beta^{i+1} = \frac{\langle \mathbf{r}^{i+1}, \mathbf{g}^{i+1} \rangle}{\langle \mathbf{r}^{i}, \mathbf{g}^{i} \rangle}$$
 (paramètre de conjugaison optimal)
(8)
$$\mathbf{d}^{i+1} = \mathbf{g}^{i+1} + \beta^{i+1} \mathbf{d}^{i}$$
 (nouvelle direction de descente)

(8)
$$\mathbf{d}^{i+1} = \mathbf{g}^{i+1} + \beta^{i+1} \mathbf{d}^{i}$$
 (nouvelle direction de descente)

Tableau 15.2 – Algorithme du gradient conjugué préconditionné (GCPC).

Remarque 15.2.4 Cette variante du GCPC, qui est de loin la plus répandue, est parfois appelée dans la littérature : gradient conjuqué préconditionné non transformé ('untransformed preconditioned conjugate gradient'). Par opposition à la version transformée qui manipule les entités propres de la nouvelle formulation.

15.2.2.3 GCPC implanté dans code_Carmel

L'algorithme du GCPC implanté dans le code est très similaire à celui décrit en 15.2. Précisons juste que son critère d'arrêt est en relatif par rapport à la norme du second membre initial et que l'estimée initiale est prise égale à zéro ¹⁹ ($\mathbf{u}^0 = 0$).

Son nombre d'itérations maximal est paramétré par nbIterationMax et le critère d'arrêt, basé dorénavant sur la norme du résidu (et non plus la norme au carré), est piloté via kEpsilonGCP. Ce dernier point est important car il est plus facile (et licite!), en arithmétique double précision, de contrôler un paramètre évoluant typiquement entre 10^{-9} et 10-6 que sa valeur au carré qui évolue alors entre 10^{-18} et 10^{-12} .

Des valeurs conseillées pour ces paramètres sont, respectivement, 300 et 10⁻⁶. Avec un questionnement à avoir lorsqu'on juge avoir besoin d'un grands nombre d'itérations (>1000) ou que le critère d'arrêt est extrême : $>10^{-9}$ ou $<10^{-3}$. Pour plus d'informations on pourra consulter le paragraphe 7.2 de [Boiteau 2014].

Plus récemment, un chantier logiciel a été engagé pour, outre la rationalisation et la mutualisation des sources, enrichir de quelques perfectionnements mineurs :

- Pré-tests des paramètres de contrôles de l'algorithme;
- Suivant les cas de figure émission d'une erreur ou d'un warning;
- Arrêt prématuré et sortie avec u^{sol}=0 (vecteur solution), si la norme euclidienne du second membre est inférieure à la précision machine.

Remarque 15.2.5 Code Carmel propose désormais aussi un algorithme du GCPC non préconditionn'e ($\mathbf{M}=\mathbf{Id}$, TypeSolveurLineaire = 0). Il ne sert que pour faire des comparaisons et

^{19.} Ce choix peut paraître un peu contre-intuitif, surtout lors des successions de résolutions d'un algorithme de Newton, mais en pratique, c'est souvent celui qui est plébiscité (cf. Code_Aster, TELEMAC). Le fait de partir de l'origine ne biaise pas la recherche et procure, en moyenne, le meilleur compromis temps/robustesse. Le seul cas de figure pour lequel on prendrait comme itéré initial autre chose que l'origine serait le cas de figure des techniques de redémarrage (pour contrôler une perte d'orthogonalité ou gérer des problèmes de type multiple seconds membres).

des validations (numériques et informatiques).

Remarque 15.2.6 En cas de non-convergence, le GCPC de Code_Carmel s'arrête sur l'erreur fatale : kErreurConvergenceGCP. Dans le cas contraire, le code d'erreur est kAucuneErreur. Si la stratégie d'optimisation non-linéaire/linéaire est activée (via reacprecond_methodeNL), le code d'erreur peut aussi prendre la valeur kErreurReacPrecond pour alerter l'algorithme de Newton de la nécessité de réactualiser la matrice tangente.

Remarque 15.2.7 On peut tracer à l'écran, dans une barre de convergence ou dans un fichier l'évolution du résidu jusqu'à convergence. Ces options sont contrôlées par les paramètres :

- kAfficheBarreConvergence;
- kSauveConvergence;
- descripteurFichierConvergence.

15.2.3 Palette de préconditionneurs disponibles dans code_Carmel

Parmi la kyrielle de préconditionneurs possibles, on a retenu dans le code que trois possibilités :

- Jacobi (TypeSolveurLineaire = 2).
- Crout ILU(0) (TypeSolveurLineaire = 1).
- MUMPS simple précision (TypeSolveurLineaire = 3) et éventuellement relaxé ²⁰ (si la condition mumps_relax > 0 est respectée). Ce préconditionneur n'est activable que si le programme code_Carmel a été au préalable linké avec MUMPS (cf. makefile et variable USE_MUMPS).

Ces préconditionneurs sont listés ici par ordre croissant de consommations mémoire, de robustesse, et de complexité (numérique et informatique). Souvent l'efficacité en nombre d'itérations suit aussi la même hiérarchie. Par exemple pour le cube de Rubinacci (cf. tableau 3.2-1), on a, quelque soit le critère d'arrêt, un nombre d'itérations qui passe de quelque centaines (pour Jacobi) à une centaine (pour Crout) puis à seulement quelques itérations (pour MUMPS). Cependant une itération de MUMPS coûte beaucoup plus cher en temps et en mémoire qu'une itération de Crout. Dès lors il y a un compromis à trouver.

Ces préconditionneurs sont basés sur la stratégie suivante, qui n'est en fait vérifiée que sur quelques problèmes canoniques mais qui s'avère souvent "payante" même sur des problèmes industriels :

- Plus on s'éloigne de la diagonale principale, plus les ordres de grandeur des termes décroissent.
- Les termes d'ordre de grandeurs petits "participent peu" au calcul.

En se basant sur ces "axiomes", tous les "coups sont donc permis" pour construire une approximation de \mathbf{K}^{-1} la moins coûteuse possible :

- Avec Jacobi : $\mathbf{M}_{\mathrm{Jacobi}} = \mathrm{diag}(\mathbf{K})^{21}$.
- Avec Crout : $\mathbf{M}_{\text{Crout}} = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^T$ en ne tenant pas compte du remplissage de la factorisée (profil $(\mathbf{M}_{\text{Crout}}) = \operatorname{profil}(\mathbf{K})^{22}$)
- Avec Mumps : $\mathbf{M}_{\text{MUMPS}} = \text{simple_pr\'ecision}\left(\mathbf{L}\,\mathbf{D}\,\mathbf{L}^T\right)$ en filtrant au préalable les termes extra-diagonaux trop petits. Mais ici le profil de $\mathbf{M}_{\text{MUMPS}}$ peut être bien plus important que celui de \mathbf{K} d'où un plus gros encombrement mémoire (même en simple précision).

code_Carmel proposent donc tout un continuum de préconditionneurs dont on peut moduler le coût calcul et mémoire en fonction des ressources disponibles et de la difficulté du problème. Sachant qu'en cas de non-convergence, on a toujours le recours possible au solveur linéaire de référence : MUMPS en tant que solveur direct (cf. paragraphe 15.3).

^{20.} C'est-à-dire qu'avant de factoriser la matrice en simple précision, on la "sparsifie", on la creuse en enlevant les termes extra-diagonaux trop petits.

²¹. Matrice dont les uniques termes éventuellement non nuls correspondent aux termes diagonaux de K.

^{22.} Le profil correspond ici à l'ensemble des termes non nulles d'une matrice creuse.

Type de préconditionneur	nombre d'itérations
Sans (TypeSolveurLinéaire=0)	965
Jacobi (TypeSolveurLinéaire=2)	360
Crout ILU(0) (TypeSolveurLinéaire=1)	179
MUMPS SP très relaxé	6
(TypeSolveurLinéaire=3 + mumps_relax = 10^{-3})	
moyennement relaxé	4
$(\dots + \mathtt{mumps_relax} = 10^{-4})$	
peu relaxé	2
$(\dots + \mathtt{mumps_relax} = 10^{-5})$	
pas relaxé	2
(+ mumps_relax < 0)	

Tableau 15.3 – Nombre d'itérations du GCPC sur le cas-test du cube de Rubinacci avec $\varepsilon = 10^{-9}$ (Code_Carmel v1.7.6 sur poste calibre 7).

En non-linéaire, on peut tirer aussi un grand avantage de la mutualisation, entre plusieurs dizaines d'itérations du solveur non-linéaire (souvent un algorithme de type Newton), de la construction du préconditionneur. Le processus non-linéaire peut nécessiter plus d'itérations, mais au final, comme celles-ci sont plus rapides, l'utilisateur est souvent gagnant!

Cette stratégie est surtout profitable pour la combinaison la plus coûteuse : GCPC + préconditionneur MUMPS. Elle s'active via le paramètre reacprecond_methodeNL. Avec une valeur strictement positive de ce mot-clé (par exemple 30), on ne recalcule le préconditionneur que si :

- Le GCPC a consommé plus de reacprecond_methodeNL itérations pour une itération du solveur non-linéaire donnée.
- Cela fait au moins reacprecond_methodeNL itérations du solveur non-linéaire que cette réactualisation n'a pas été opérée.
- Le résidu du solveur non-linéaire augmente au lieu de diminuer ²³.

Remarque 15.2.8 La littérature spécialisée propose de nombreux préconditionneurs : explicites (polynomiaux, SPAI, AINV ...), implicites (Schwarz, IC ...), multi-niveaux (décomposition de domaine, multigrilles ...) ... Certains sont dédiés à une application, d'autres plus généraux. Les "effets de modes" ont aussi fait leur œuvre! Pour plus d'informations on pourra consulter, par exemple, les ouvrages de G.Meurant, Y.Saad, H.A.Van der Vorst, J.W.Demmel, G.W.Stewart ...

Remarque 15.2.9 Pour l'instant, la mutualisation du préconditionneur s'opère alors qu'on continue à réactualiser (pour rien) la matrice tangente. A l'avenir on pourra aussi éviter ce surcoût inutile de calculs élémentaires et d'assemblages. Cette stratégie deviendra alors souvent payante, même pour les préconditionneurs très peu coûteux (tels Crout ou Jacobi). Pour l'instant, la refonte en cours des routines de construction de la matrice tangente et l'absence de modularité de celles présentes en v1.7.3, ne nous ont pas permis d'avancer sur ce point.

15.2.3.1 Préconditionneur de Jacobi

La première option est souvent proposée dans les codes pour sa simplicité de mise en œuvre, son rapport "efficacité numérique/surcoût calcul" pour des problèmes pas trop mal conditionnés, et sa très bonne scalabilité (en mode parallèle).

Elle consiste à préconditionner par la diagonale l'opérateur initial :

$$\mathbf{M}_{\text{Jacobi}} := \text{diag}(\mathbf{K}) \tag{15.18}$$

^{23.} On pourrait durcir ce critère en le remplaçant par "le résidu n'a pas diminué d'au moins x%" avec x=20 ou 30%.

C'est ce qu'on appelle le préconditionnement diagonal ou de Jacobi (JCG pour 'Jacobi Conjugate Gradient') par référence à la méthode stationnaire du même nom. Son surcoût mémoire par rapport au GC basique étant négligeable, de l'ordre de $\mathcal{O}\left(N\right)$, on aurait tort de se priver de son accélération. Même si cette dernière peut s'avérer modeste.

D'autre part, comme dans Code_Carmel, le système résolu est modifié "en place" afin de tenir compte de ce préconditionnement, le surcoût calcul de l'étape de préconditionnement (étape (6) de 15.2) est nul. On ne " paye" que la transformation initiale et finale du problème.

Remarque 15.2.10 C'est une solution souvent retenue en CFD (pour EDF R&D: Code_Saturne, TELEMAC). Dans ces domaines, une grande attention est portée au schéma de résolution non-linéaire et à la construction du maillage afin qu'ils produisent un problème bien conditionné. C'est ce qui a fait la renommée du JCG, transformé pour l'occasion en véritable "bête de course " dédiée aux gros calculateurs parallèles.

Remarque 15.2.11 C'est une solution qui n'a, par contre, pas été retenue dans Code_Aster du fait de son manque de robustesse sur des études thermo-mécaniques industrielles.

Remarque 15.2.12 Jusqu'en v1.7.6, l'usage de ce préconditionneur dans Code_Carmel comportait un bug. En sortie du gradient conjugué on ne reconvertissait pas correctement le problème de travail de manière à ce que la matrice et le second membre ne comportent plus trace du préconditionnement (conversion inverse de l'équation 15.16). Cela pouvait produire potentiellement des résultats faux si on utilisait ces éléments pour des post-traitements. Par contre, le déroulement d'un Newton ou du solveur ODE n'étaient pas impactés car ceux-ci réinitialisent pour chacune de leurs itérations le système linéaire. Ce bug a été corrigé lors de ce chantier logiciel.

15.2.3.2 Préconditionneur de Crout

La seconde option concerne le préconditionnement par une factorisation de Cholesky incomplète IC(0) (dite aussi factorisation de Cholesky-Crout). L'opérateur initial étant supposé SPD, il admet une décomposition de Cholesky du type $\mathbf{K} = \mathbf{C} \mathbf{C}^T$ où \mathbf{C} est une matrice triangulaire inférieure. On appelle factorisation incomplète de Cholesky, la recherche d'une matrice \mathbf{F} triangulaire inférieure aussi creuse que possible et telle que $\mathbf{F} \mathbf{F}^T$ soit proche de \mathbf{K} dans un sens à définir. Par exemple, en posant $\mathbf{B} = \mathbf{K} - \mathbf{F} \mathbf{F}^T$, on va demander que l'erreur relative (exprimée dans une norme matricielle au choix):

$$\Delta := \frac{\|\mathbf{B}\|}{\|\mathbf{K}\|} \tag{15.19}$$

soit la plus petite possible. A la lecture de cette définition "assez évasive" on entrevoit la profusion de scénarios possibles. Chacun y est allé de sa propre factorisation incomplète! L'ouvrage de G.Meurant 24 , en autre, en montre la grande diversité : IC(n), MIC(n), relaxée, réordonnée, par blocs ...

Donc cette option consiste à prendre comme préconditionneur :

$$\mathbf{M}_{\text{Crout}} := (\mathbf{F}) (\mathbf{F})^T \tag{15.20}$$

Toutefois, pour se simplifier la tâche, on impose souvent $a\ priori$ la structure creuse de ${\bf F}$, c'est-à-dire son graphe (partie triangulaire de ce qu'on a appelé profil précédemment) :

$$\Xi(\mathbf{F}) := \{(i, j), 1 \le j \le i - 1, 1 \le i \le N \, F_{ij} \ne 0\}$$
(15.21)

Il s'agit évidemment de trouver un compromis : plus ce graphe sera étendu et plus l'erreur (cf. équation 15.19) sera petite mais plus le calcul et le stockage de ce qui n'est (dans le cas qui nous intéresse) qu'un préconditionneur vont être coûteux. Généralement, les préconditionneurs

^{24.} G.Meurant. Computer solution of large linear systems. Ed. Elsevier (1999).

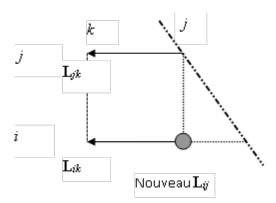


Figure 15.7 – Phénomène de remplissage ('fill-in') lors de la factorisation.

sont récursifs et dans leur niveau de base, ils imposent à \mathbf{F} la même structure que celle de \mathbf{K} : $\Xi(\mathbf{F}) = \Xi(\mathbf{K})$.

Les systèmes de Code_Carmel n'étant généralement pas SPD mais seulement symétriques, on généralise ce concept à la factorisation LU. On parle alors de préconditionneur ILU pour 'Incomplete LU'.

La construction de la factorisée s'effectue, ligne par ligne, via la formule habituelle :

$$L_{ij} = \frac{1}{D_j} \left(K_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} D_k L_{jk} \right)$$
 (15.22)

D'où le phénomène de remplissage progressif du profil ('fill-in' en anglais) : initialement la matrice \mathbf{L} à le même remplissage que le matrice \mathbf{K} , mais au cours du processus, à un terme nul de K_{ij} peut correspondre un terme non nul de L_{ij} . Il suffit qu'il existe une colonne k (< j) comportant un terme non nul pour les lignes i et j (cf. figure 15.7).

Ces termes non nuls pouvant d'ailleurs eux-mêmes correspondre à des remplissages antérieurs, d'où une notion de récursivité pouvant s'interpréter comme autant de "niveaux" de remplissage. On parlera ainsi de factorisée incomplète de niveau 0 (stockée dans $\mathbf{L}(0)$) si elle reproduit à l'identique la structure (mais bien sûr pas les valeurs qui sont différentes) de la partie diagonale inférieure stricte de \mathbf{K} (i.e. le même graphe). La factorisée de niveau 1 (resp. $\mathbf{L}(1)$) pourra inclure le remplissage conduit par des termes non-nuls de \mathbf{K} , celle de niveau 2 (resp. $\mathbf{L}(2)$) pourra y mêler les nouveaux termes non nuls précédents pour constituer d'éventuels nouveaux termes, et ainsi de suite récursivement ...

Dans Code_Carmel, on s'est limité au niveau 0. Dans Code_Aster, les problèmes étant généralement beaucoup moins bien conditionnés, on permet à l'utilisateur plusieurs niveaux de remplissage ²⁵.

Remarque 15.2.13 La matrice n'étant plus SPD mais simplement symétrique régulière on n'est, a priori, pas assuré de l'existence d'une factorisée \mathbf{LDL}^T sans avoir recours à des permutations de lignes et de colonnes ($\mathbf{PK} = \mathbf{LDL}^T$ avec \mathbf{P} matrice de permutation). Un scénario de gestion de ces pivots a été prévu dans Code_Carmel (paramètres kPivotsCrout et kEpsilonPivotsCrout). Mais ce scénario peut parfois achopper. Dans ce cas de figure le code s'arrête sur une erreur fatale : kErreurPreconditionneur.

Remarque 15.2.14 En toute rigueur on devrait parler de factorisation incomplète de type ILDLT mais dans la littérature et dans les documentations des codes, on amalgame déjà souvent ILU et

^{25.} Empiriquement, on constate que les coûts CPU et mémoire, a minima, double entre chaque niveau. En général, le facteur de remplissage varie entre 10 et 100. Cela laisse donc de la marge quant à ce paramètre. Pour vraiment tirer partie de ce préconditionneur on se limite à au maximum 3 niveaux. Sinon, autant utiliser le préconditionneur MUMPS!

IC, voire leurs variantes, ce n'est donc pas la peine d'enrichir la liste des acronymes! On parlera dans cette documentation indifféremment de factorisation de Crout, IC(0) ou ILU(0).

15.2.3.3 Préconditionneur MUMPS

Lorsqu'on linke Code_Carmel au produit externe MUMPS (cf. paragraphe 15.3.5.2), on peut l'utiliser comme un solveur direct (en double précision) ou comme un préconditionneur (en simple précision). Avec ce dernier scénario on bénéficie d'une solution plus robuste que les deux préconditionneurs précédents mais potentiellement plus coûteuse (en CPU et surtout en pic mémoire nécessaire).

Même si l'utilisateur peut relaxer les termes matriciels extra-diagonaux fournis à "MUMPS préconditionneur" en jouant sur le paramètre mumps_relax (cf. formule 15.23 et figure)

Si mumps_relax > 0 et
$$i \neq j$$
, $|\mathbf{K}_{ij}| < \text{mumps_relax} (|\mathbf{K}_{ii}| + |\mathbf{K}_{jj}|) \Rightarrow \tilde{\mathbf{K}}_{ij} = 0$
Sinon $\tilde{\mathbf{K}}_{ij} = \mathbf{K}_{ij}$ (15.23)

On construit ainsi, à partir de \mathbf{K} , la matrice de travail $\tilde{\mathbf{K}}$ qui va servir de donnée d'entrée à la factorisation simple précision de MUMPS. Donc cette option consiste à prendre comme préconditionneur :

$$\mathbf{M}_{\text{MUMPS}} := \text{simple_precision} \left(\tilde{\mathbf{L}} \, \tilde{\mathbf{D}} \, \tilde{\mathbf{L}}^T \right)$$
 (15.24)

Elle prolonge la notion de factorisation incomplète du préconditionneur précédent. Le fait que la plupart des termes de la factorisée soit conservée et que l'outil gère toutes une série de difficultés numériques (pivotage, singularités, hétérogénéité des ordres de grandeurs des termes... cf. paragraphe 15.3.5.3) lui confère une grande robustesse même sur des problèmes difficiles.

C'est pour ces raisons que ce préconditionneur rencontre un grand succès dans les simulations thermo-mécaniques de Code_Aster. Il est "armé" pour gérer la diversité des situations et une grande palette de difficultés numériques.

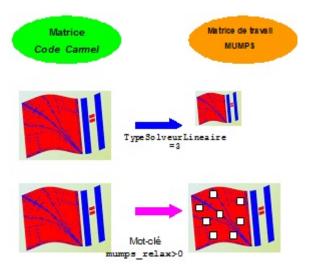


Figure 15.8 – Fonctionnalités avancées utilisant MUMPS en tant que préconditionneur : mixage de calculs simple/double précisions et filtrage matriciel.

Cette stratégie propose donc une solution industrielle viable, a minima deux fois moins gourmande en CPU et en pic RAM que la stratégie solveur direct. Et elle profite de tous les perfectionnements numériques et accélération du "grand frère direct" :

- Pour réduire le pic RAM, en plus d'abaisser mumps_relax, on peut décharger une grande partie de la mémoire sur disque (mumps_memory = '00C'), changer de renuméroteur pour réduire le remplissage (mumps_renum) ou, à terme, augmenter le nombre de processeurs (parallélisme distribué via MPI). Même si les valeurs conseillées de ces paramètres, pour optimiser à la fois temps et pic mémoire, sont plutôt, respectivement, 10-6, 'IC' et 'AUTO'.
- Pour réduire le temps de calcul on doit essayer de garder tous les objets MUMPS en RAM ²⁶ (mumps_memory = 'IC') et absolument débrancher tous les contrôles de qualité ²⁷ (mumps_post = 'OFF' et kEpsilonMUMPS < 0).

15.3 Méthodes directes

15.3.1 Le principe

15.3.1.1 Factorisation

L'idée de base des méthodes directes est de décomposer la matrice du problème K en un produit de matrices particulières (triangulaires inférieure et supérieure, diagonale) plus faciles à "inverser". C'est ce qu'on appelle la factorisation 28 de la matrice de travail :

- Si \mathbf{K} est SPD, elle admet la "factorisation de Cholesky "unique : $\mathbf{K} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$ avec \mathbf{L} triangulaire inférieure.
- $Si \mathbf{K}$ est symétrique quelconque et régulière, elle admet au moins une "factorisation $\mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^T$ ": $\mathbf{P} \mathbf{K} = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^T$ avec \mathbf{L} triangulaire inférieure à coefficients diagonaux égaux à l'unité, \mathbf{D} une matrice diagonale et \mathbf{P} une matrice de permutation.
- Si K est quelconque et régulière, elle admet au moins une "factorisation LU» : PK = LU avec L triangulaire inférieure à diagonale l'unité, U triangulaire supérieure et P une matrice de permutation.

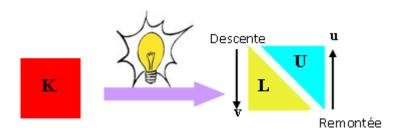


Figure 15.9 – Principe des méthodes directes.

Remarque 15.3.1 Par exemple, la matrice symétrique et régulière K ci-dessous se décompose sous la forme LDL^T suivante (sans avoir besoin ici de permutation, $P = I_d$)

^{26.} Cependant, si on ne dispose pas d'assez de mémoire par processeur, il est préférable de profiter de la gestion optimisée de l'Out-Of-Core de MUMPS plutôt que de laisser le système "swapper". Ce type de comportement très défavorable se remarque immédiatement par un écart très grand entre les temps CPU et les temps elapsed (affichés via Imonitoring_système). Si le monitoring système est activé, on émet en général un warning pour alerter l'utilisateur sur ce point. Afin d'éviter ces pertes de temps, il est préférable de pré-estimer les consommations mémoire de chacune des alternatives (via l'option TypeSolveurLinéaire = 5) et de relancer ainsi le calcul en connaissance de cause.

^{27.} Une partie de la qualité de la solution (erreur inverse) est assurée par le critère d'arrêt du GCPC. Et de toute façon on a d'emblée choisit d'édulcorer la résolution (simple précision et relaxation), donc nul besoin d'être très précis sur ce problème de travail volontairement approximé!

^{28.} Par analogie avec les factorisations polynomiales des petites classes \dots

$$\mathbf{K} := \begin{bmatrix} 10 & sym \\ 20 & 45 \\ 30 & 80 & 171 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}^{T}}$$
(15.25)

15.3.1.2 Descente-Remontée

Une fois cette décomposition effectuée, la résolution du problème est grandement facilitée. Elle ne s'exprime plus que sous forme des résolutions linéaires les plus simples qui soient : à base de matrices triangulaires ou diagonales. Ce sont les fameuses "descente-remontées" ('forward/backward algorithms'). Par exemple dans le cas d'une factorisation ${\bf L} \, {\bf U}$, le système 15.1 sera résolu par :

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{K} \, \mathbf{u} = \mathbf{f} \\ \mathbf{P} \, \mathbf{K} = \mathbf{L} \, \mathbf{U} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \mathbf{L} \, \mathbf{v} = \mathbf{P} \, \mathbf{f} & (descente) \\ \mathbf{U} \, \mathbf{u} = \mathbf{v} & (remont\acute{e}e) \end{array}$$
 (15.26)

Dans le premier système diagonal inférieur (descente), on détermine le vecteur solution intermédiaire \mathbf{v} . Ce dernier sert alors de second membre au système diagonal supérieur (remontée) dont est solution le vecteur \mathbf{u} qui nous intéresse.

Cette phase est peu coûteuse (en dense, de l'ordre de N² contre N³ pour la factorisation ²⁹ avec N la taille du problème) et peut donc être répétée de nombreuse fois en conservant la même factorisée. Ce qui est très utile lorsqu'on résout un problème de type multiples seconds membres ou lorsqu'on souhaite effectuer des résolutions simultanées.

Dans le premier scénario, la matrice \mathbf{K} est fixée et on change successivement de second membre \mathbf{f}_i pour calculer autant de solution \mathbf{u}_i (les résolutions sont interdépendantes). Cela permet de mutualiser et donc d'amortir ce coût initial de la factorisation. Cette stratégie, abondamment utilisée dans Code Aster, pourra aussi bénéficier aux algorithmes non-linéaires de code Carmel.

Dans le second scénario, on a connaissance de tous les \mathbf{f}_i en même temps et on organise, par blocs, les phases de descente-remontée, pour calculer simultanément les solutions \mathbf{u}_i indépendantes. On peut ainsi utiliser des routines d'algèbre linéaire de haut niveau plus efficaces, voire même jouer sur les consommations mémoire en stockant les vecteurs \mathbf{f}_i et \mathbf{u}_i en creux.

Remarque 15.3.2 Le produits MUMPS prévoit ces deux types de stratégie et propose même des fonctionnalités pour faciliter la construction et la résolution de complément de Schur. Ces dernières ont été mises en œuvre pour les modélisations FEM/BEM de Code_Carmel3D.

Examinons maintenant le processus de factorisation en lui-même. Il est clairement explicité dans bon nombre d'ouvrages 30 . Aussi nous ne le détaillerons pas. Précisons juste que c'est un processus itératif organisé schématiquement autour de trois boucles : l'une "dite en i" (sur les lignes de la matrice de travail), la seconde "en j" (resp. colonnes) et la troisième "en k" (resp. étapes de la factorisation). Elles construisent itérativement une nouvelle matrice $\tilde{\mathbf{A}}_{k+1}$ à partir de certaines données de la précédente, $\tilde{\mathbf{A}}_k$, via la formule classique de factorisation qui s'écrit formellement :

Boucles en i, j, k
$$\tilde{\mathbf{A}}_{k+1}(i,j) := \tilde{\mathbf{A}}_{k}(i,j) - \frac{\tilde{\mathbf{A}}_{k}(i,k) \tilde{\mathbf{A}}_{k}(k,j)}{\tilde{\mathbf{A}}_{k}(k,k)}$$
(15.27)

^{29.} En dense, Coppersmith et Winograd (1982) ont montré qu'on pouvait, au mieux, diminuer cette complexité algorithmique à CN^{α} avec α =2,49 et C constante (pour des N grands).

^{30.} G.H.Golub & C.F.VanLoan, Matrix computations. G.W.Stewart, Matrix computations. T.A.Davis, Direct methods for sparse linear systems. G.Meurant, Computer solution of large linear systems. I.Duff, Direct methods for sparse matrix.

Initialement le processus est activé avec $\tilde{\mathbf{A}}_0 = \mathbf{K}$ et à la dernière étape, on récupère dans la matrice carrée $\tilde{\mathbf{A}}_N$ les parties triangulaires (\mathbf{L} et/ou \mathbf{U}) voire diagonale (\mathbf{D}) qui nous intéressent. Par exemple, dans le cas $\mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^T$:

Boucles en i, j, k
si i
$$<$$
 j : $\mathbf{L}(i,j) = \tilde{\mathbf{A}}_{N}(i,j)$
si i $=$ j : $\mathbf{D}(i,j) = \tilde{\mathbf{A}}_{N}(i,j)$ (15.28)

Remarque 15.3.3 La formule 15.27 contient en germe les problèmes inhérents aux méthodes directes : en stockage creux, le fait que le terme $\tilde{\mathbf{A}}_{k+1}(i,j)$ peut devenir non nul alors que $\tilde{\mathbf{A}}_k(i,j)$ l'est (notion de remplissage de la factorisée, 'fill-in', impliquant donc une renumérotation ou 'ordering'); la propagation d'erreur d'arrondis ou la division par zéro via le terme $\tilde{\mathbf{A}}_k(k,k)$ (notion de pivotage et d'équilibrage des termes de la matrice ou 'scaling').

15.3.2 Les différentes approches

L'ordre des boucles i, j et k n'est pas figé. On peut les permuter et effectuer les mêmes opérations mais dans un ordre différent. Cela définit ainsi six variantes kij, kji, ikj ... qui vont manipuler différentes zones de la matrice courante : "zone des nouveaux termes calculés » via 15.27, "zone déjà calculée et utilisée" dans A REVOIR, "zone déjà calculée et inutilisée" et "zone non encore calculée". Par exemple, dans la variante jik, on a le schéma de fonctionnement suivant pour j fixé :

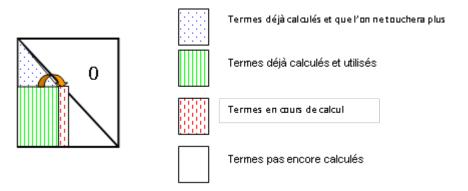


Figure 15.10 – Schéma de construction d'une factorisation "jik" ('right looking').

Remarque 15.3.4 La méthode mise en œuvre dans MUMPS est orientée colonne (" kji").

Remarque 15.3.5 Certaines variantes portent des noms particuliers : algorithme de Crout ("jki") et celui de Doolitle ("ikj").

Remarque 15.3.6 Dans les papiers on utilise souvent la terminologie anglo-saxonne désignant l'orientation des manipulations matricielles plutôt que l'ordre des boucles : 'looking forward method', 'looking backward method', 'up-looking', 'left-looking', 'right-looking', 'left-right-looking' ...

Toutes ces variantes se déclinent encore suivant :

- Que l'on exploite certaines propriétés de la matrice (symétrie, définie-positivité, bande ...) ou que l'on cherche le périmètre d'utilisation le plus large;
- Que l'on effectue des traitements scalaires ou par blocs;
- Que la décomposition en blocs soit déterminée par des aspects mémoires (cf. méthode $\mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^T$ paginée de Code_Aster) ou plutôt liée aux indépendances des tâches ultérieures (cf. multifrontale native Aster et MUMPS);

- Que l'on réintroduit des termes nuls dans les blocs pour faciliter l'accès aux données ³¹ et susciter des opérations algébriques très efficaces, souvent via des BLAS3 ³² (cf. multifrontale native Aster et MUMPS);
- Que l'on groupe les contributions affectant un bloc de lignes/colonnes (approche 'fan-in', cf. PaStiX) ou qu'elles soient appliquées au plus tôt ('fan-out');
- Qu'en parallélisme, on cherche à ménager différents niveaux de séquences de tâches indépendantes, qu'on les ordonnance statiquement ou dynamiquement, qu'on recouvre du calcul par de la communication ...
- Que l'on applique des pré- et post-traitements pour réduire le remplissage et améliorer la qualité des résultats : renumérotation des inconnues, mise à l'échelle des termes de la matrice, pivotage partiel (ligne) ou total (ligne et colonne), scalaire ou par blocs diagonaux, raffinement itératif ...

Pour les regrouper on distingue souvent quatre catégories :

- Les algorithmes classiques : Gauss, Crout, Cholesky, Markowitz (Matlab, Mathematica, Y12M ...);
- Les méthodes frontales (MA62 ...);
- Les méthodes multifrontales (MULT_FRONT Aster, MUMPS, SPOOLES, TAUCS, UFM-PACK, WSMP ...);
- Les supernodales (SuperLU, PaStiX, CHOLMOD, PARDISO ...).

15.3.3 Les principales étapes

Lorsqu'on traite des systèmes creux, la phase de factorisation numérique (cf. expression 15.28) ne s'applique pas directement à la matrice initiale \mathbf{K} , mais à une matrice de travail $\mathbf{K}_{\text{travail}}$ résultant d'une phase de prétraitements. Et ce, afin de réduire le remplissage, d'améliorer la précision des calculs et donc d'optimiser les coûts ultérieurs en CPU et en mémoire. Grossièrement cette matrice de travail peut s'écrire sous la forme du produit matriciel suivant :

$$\mathbf{K}_{\text{travail}} = \mathbf{P}_0 \, \mathbf{D}_r \, \mathbf{K} \, \mathbf{Q}_c \, \mathbf{D}_c \, \mathbf{P}_0^T \tag{15.29}$$

dont nous allons décrire les différents éléments par la suite.

On peut ainsi décomposer le fonctionnement d'un solveur direct en quatre étapes :

— Prétraitements et factorisation symbolique : 33 elle intervertit l'ordre des colonnes de la matrice de travail (via une matrice de permutation \mathbf{Q}_c) afin d'éviter les divisions par zéro du terme $\tilde{\mathbf{A}}_k(k,k)$ et de réduire le remplissage. De plus elle rééquilibre les termes afin de limiter les erreurs d'arrondi (via les matrices de mise à l'échelle \mathbf{D}_r et \mathbf{D}_c). Cette phase peut être aussi cruciale pour l'efficacité algorithmique (gain d'un facteur 10 parfois constaté) et la qualité des résultats (gain de 4 ou 5 décimales).

Dans cette phase, on crée aussi les structures de stockage de la matrice factorisée creuse et des auxiliaires (pivotage dynamique, communication ...) requis par les phases suivantes. De plus, on estime l'arbre de dépendance des tâches, leur répartition initiale selon les processeurs et les consommations mémoires totales prévues.

^{31.} Ce compromis creux/dense permet de diminuer les adressages indirects aux données et ainsi de mieux utiliser la hiérarchie mémoire des machines actuelles.

^{32.} Le ratio " calcul/accès mémoire" des Blas niveau 3 (produit matrice/matrice) est N fois meilleur (avec N la taille du problème) que celui des autres niveaux de Blas. Il est aussi souvent supérieur à celui de routines "faites à la main" non optimisées sur ces aspects "localité des données/hiérarchie mémoire".

^{33.} Le paramètre code_Carmel permettant de contrôler cette étape est mumps_pre. Il est utile dans les deux usages du produit : solveur direct et préconditionneur.

Cette étape peut aussi fournir à l'utilisateur les pré-évaluations RAM, disque et flops (Floating-Point Operation per Second) des besoins de MUMPS. On les retrouve dans les affichages qu'obtient l'utilisateur Carmel lorsqu'il sélectionne l'option de pré-estimation des besoins mémoire : TypeSolveurLineaire = 5.

— L'étape de renuméroration : ³⁴ elle intervertit des lignes de la matrice (via la matrice de permutation \mathbf{P}_0) afin de réduire le remplissage qu'implique la factorisation. En effet, dans la formule 15.27, on voit que la factorisée ($\tilde{\mathbf{A}}_{k+1}(i,j) \neq 0$) peut contenir un nouveau terme non nul dans son profil alors que la matrice initiale n'en comportait pas ($\tilde{\mathbf{A}}_k(i,j) = 0$). Du fait du terme $\frac{\tilde{\mathbf{A}}_k(i,k)\ \tilde{\mathbf{A}}_k(k,j)}{\tilde{\mathbf{A}}_k(k,k)}$ non nécessairement nul.

En particulier, il est non nul lorsqu'on peut trouver des termes non nuls de la matrice initiale du type $\tilde{\mathbf{A}}_k\left(i,l\right)$ ou $\tilde{\mathbf{A}}_k\left(l,j\right)$ (l < i et l < j). Ce phénomène peut conduire à des surcoûts mémoire et calcul très important (la factorisée peut être 100 fois plus grosse que la matrice creuse initiale!).

D'où l'idée de renuméroter les inconnues (et donc de permuter les lignes de \mathbf{K}) afin de freiner ce phénomène qui est le vrai "talon d'Achille" des méthodes directes. Pour ce faire, on fait souvent appel à des produits externes (METIS, SCOTCH, CHACO, JOSTLE, PARTY ...) ou à des heuristiques embarquées avec les solveurs (AMD, RCMK ...). Bien sûr, ces produits affichent des performances différentes suivant les matrices traitées, le nombre de processeurs ... Parmi eux, $METIS^{35}$ et $SCOTCH^{36}$ sont très répandus et "sortent souvent du lot" (gain jusqu'à 50%).

- La phase de factorisation numérique : 37 elle met en œuvre la formule 15.27 via les méthodes entrevues au paragraphe précédent. C'est la phase, de loin, la plus coûteuse qui va construire explicitement les factorisations creuses $\mathbf{L}\mathbf{L}^T$, $\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T$ ou $\mathbf{L}\mathbf{U}$.
- La phase de résolution : ³⁸ elle effectue les descentes-remontées 15.26 dont "jaillit" (enfin!) la solution **u**. Elle est peu coûteuse et mutualise éventuellement une factorisation numérique ultérieure (multiples seconds membres, résolutions simultanées, redémarrage de calcul ...).

Remarque 15.3.7 Les étapes 1 et 2 ne requièrent que la connaissance du graphe d'élimination de la matrice initiale. Donc finalement que des données stockables et manipulables sous forme d'entiers 39. Elles n'ont besoin des termes de la matrice que si les étapes de scaling sont enclenchées. Dans le branchement de MUMPS dans code_Carmel (et dans Code_Aster), on recherche plus la robustesse que la performance et on fournit au produit les termes matriciels complets et pas seulement leurs graphes.

Remarque 15.3.8 Les étapes 1 et 4 sont indépendantes tandis que les 2 et 3, a contrario, sont liées. Suivant les produits/approches algorithmiques, on les agglomère différemment : 1 et 2 sont liés dans MUMPS, 2 et 3 dans SuperLu et 1, 2 et 3 dans UMFPACK ... MUMPS permet d'effectuer séparément mais successivement les étapes 1+2, 3 et 4, voire de mutualiser leurs résultats pour effectuer divers séquences. Pour l'instant, dans code_Carmel, on utilise principalement les séquences 1+2+3+4 (solveur direct), 1+2+3 puis plusieurs fois 4 (solveur direct avec mutualisation de la matrice tangente ou préconditionneur pour GCPC) et 1 (Pré-estimation mémoire).

Remarque 15.3.9 Certains produits proposent de tester plusieurs stratégies dans une ou plusieurs étapes et choisissent la plus adaptée : SPOOLES et WSMP pour l'étape 1, TAUCS pour l'étape 3 etc.

^{34.} Le paramètre code_Carmel permettant de contrôler cette étape est mumps_renum. Avec la valeur 'AUTO', il va choisir parmi les renuméroteurs disponibles (MUMPS embarque un certain nombre de renuméroteurs simples (AMD, AMF, QAMD, PORD) plus souvent des rénuméroteurs "industriels" (METIS, SCOTCH)), le plus approprié au cas de figure. Il est utile dans les deux usages du produit : solveur direct et préconditionneur.

 $^{35.\} http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/views/metis/.$

^{36.} http://www.labri.fr/perso/pelegrin/scotch/scotch_fr.html.

^{37.} Dans code_Carmel, on se limite pour l'instant aux factorisations **LU**. Les paramètres permettant de contrôler cette étape sont mumps_memory, mumps_pivot et Lmumps_autocorrec. Ils sont utiles dans les deux usages du produit : solveur direct et préconditionneur.

^{38.} Les paramètres code_Carmel permettant de contrôler cette étape sont mumps_post et kEpsilonMUMPS. Ils sont surtout utiles dans le scénario solveur direct. Dans l'usage préconditionneur, il vaut mieux les débrancher.

^{39.} Seules les deux dernières étapes ont vraiment besoin des termes effectifs de la matrice.

Remarque 15.3.10 Les outils de renumérotation de la première phase sont basés sur des concepts très variés : méthodes d'ingénieurs, techniques géométriques ou d'optimisation, théorie des graphes, théorie spectrale, méthodes tabou, algorithmes évolutionnaires, ceux mémétics, ceux basés dits de "colonies de fourmis", réseaux neuronaux ... Tous les coups sont permis pour améliorer l'optimum local sous la forme duquel s'exprime la problématique du renuméroteur. Ces outils servent aussi souvent à partitionner/distribuer des maillages. En général, METIS s'avère le plus efficace. Mais il est de plus concurrencé par son challenger bordelais : SCOTCH.

Remarque 15.3.11 Aux étapes numériques décrites précédemment se rajoutent bien sûr des étapes permettant de gérer les contingences informatiques : initialisation ou destruction de l'occurrence de calcul, remplissage de celle-ci via les données code_Carmel, transfert de la solution calculée à code_Carmel... Elles sont détaillées dans la partie descriptive du chantier logiciel de ce document.

15.3.4 Les principales difficultés

Parmi les difficultés que doivent surmonter les "méthodes directes creuses", on trouve :

- La manipulation de structures de données complexes qui optimisent le stockage (cf. profil de la matrice) mais qui complexifie l'algorithmique (cf. pivotage, OOC ⁴⁰...). Cela contribue à abaisser le ratio "calcul/accès aux données".
- La gestion efficace des données vis-à-vis de la hiérarchie mémoire et la bascule IC/OOC. C'est une question récurrente à beaucoup de problèmes, mais qui ici est prégnante du fait de la forte consommation calcul.
- La gestion du *compromis creux/dense* (pour les méthodes par fronts) vis-à-vis de la consommation mémoire, de la facilité d'accès aux données et de l'efficacité des briques élémentaires d'algèbre linéaire.
- Le choix de la bonne renumérotation : c'est un problème NP-complet! Pour les problèmes de grandes tailles, on ne peut trouver en un temps "raisonnable" la renumérotation optimale. On doit se contenter d'une solution "locale". Cette question devient plus prégnante avec l'émergence de renuméroteurs parallèles (ParMetis et PT-Scotch).
- La gestion effective de la *propagation des erreurs d'arrondi* via le scaling, le pivotage et les calculs d'erreurs sur la solution (erreur directe/inverse ⁴¹ et conditionnement). Ce point est particulièrement crucial pour les systèmes singuliers de Carmel.
- La taille de la factorisée qui est souvent le "goulet d'étranglement" n° 1. Sa répartition entre processeurs (via le parallélisme distribué) et/ou l'OOC ne permettent pas toujours de surmonter cet écueil (cf. figure 15.11). Compte-tenu de l'usage actuel de Carmel qui se focalise essentiellement sur des machines de bureau comportant peu de RAM, cet inconvénient est particulièrement limitant. Il sera, en partie, levé par le recours à des clusters parallèles.

15.3.5 Le produit MUMPS

15.3.5.1 Historique

Le package MUMPS implémente une multifrontale "massivement" parallèle ('MUltifrontal Massively Parallel sparse direct Solver') mise au point durant le Projet européen PARASOL (1996-1999) par les équipes de trois laboratoires : CERFACS, ENSEEIHT-IRIT et RAL (I.S.Duff, P.R.Amestoy, J.Koster et J.Y.L'Excellent ...). Depuis cette version finalisée (MUMPS 4.04 22/09/99) et public (libre de droit), une trentaine d'autres versions ont été livrées (1 ou 2 par an). Ces développements corrigent des anomalies, étendent le périmètre d'utilisation, améliorent l'ergonomie

^{40.} IC pour In-Core (toutes les structures de données sont en RAM) et OOC pour Out-Of-Core (certaines sont basculées sur disque).

^{41.} Référencées souvent sous le vocable anglo-saxon : 'forward/backward errors'.

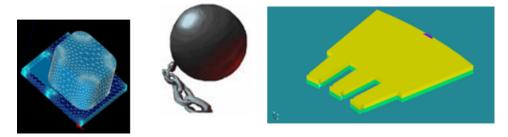


Figure 15.11 – Le "boulet" des solveurs directs creux : la taille de la factorisée; Facteur 35 entre la taille de la matrice et celle de sa factorisée (pour le cas-test Code_Carmel3D TEAM7, fig. de gauche) voire plus de 100 (pour l'étude TOLE_CP1_APHI, fig. de droite).

et surtout, enrichissent les fonctionnalités. MUMPS est donc un produit pérenne, développable ⁴² et maintenu par des équipes de l'IRIT, du CERFACS, du CNRS et de l'INRIA (une demi-dizaine de personnes).

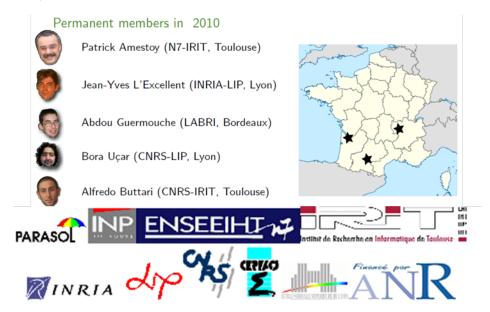


Figure 15.12 - Principaux contributeurs de MUMPS: organismes, projets et... chercheurs.

Le produit est public et téléchargeable sur son site web : http ://graal.ens-lyon.fr/MUMPS. On recense environ 1000 utilisateurs directs (dont 1/3 Europe + 1/3 USA) sans compter ceux qui l'utilisent via les librairies qui le référencent (PETSc, TRILINOS, Matlab et Scilab). Son site propose de la documentation (théorique et d'utilisation), des liens, des exemples d'application, ainsi qu'un forum de discussion (en anglais) traçant le retour d'expérience sur le produit (bugs, problèmes d'installation, conseils...).

Chaque année une dizaine de travaux algorithmiques/informatiques aboutissent à des améliorations du package (thèse, post-doc, travaux de recherche...). D'autre part il est utilisé régulièrement pour des études industrielles (EADS, CEA, BOEING, GéoSciences Azur, SAMTECH, Code_Aster/Telemac...).

EDF R&D entretient depuis 2007 une collaboration ⁴³ active et mâture ("gagnant-gagnant") avec l'équipe MUMPS. D'abord initiée de manière informelle dans le cadre de l'ANR SOLSTICE,

^{42.} Ce produit, au départ uniquement dédié à un seul usage, est devenu progressivement une véritable plate-forme de développement totalisant plus de 250 000 lignes (C et F90).

^{43.} Échanges de REX, remontées de bugs, expertises, aide à la spécification, validation indépendantes, cofinan-

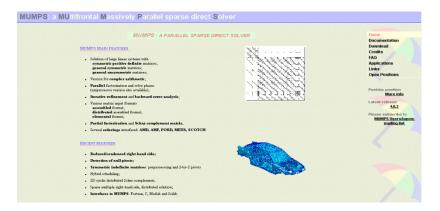


Figure 15.13 – La page d'accueil du site web de MUMPS.

celle-ci s'est ensuite formalisée sous la forme d'un partenariat EDF/INPT sur le low-rank. Cette collaboration va évoluer en 2014 et devrait prendre la forme juridique d'un consortium.

Le très bon déroulement de cette collaboration nous a conduit à organiser, sur le site même d'EDF Lab Clamart, les "MUMPS Users Group Meeting 2013" ⁴⁴.

15.3.5.2 Principales caractéristiques de MUMPS

MUMPS implémente une multifrontale effectuant une factorisation $\mathbf{L}\mathbf{U}$ ou $\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T$ (cf. paragraphe 15.3.2). Ses principales caractéristiques sont :

- Large périmètre d'utilisation ⁴⁵ SPD, symétrique quelconque, non symétrique, réel/complexe, simple/double précision, matrice régulière/singulière.
- Admet *trois modes de distribution des données* : élémentaire, assemblé centralisé ou assemblé distribué ⁴⁶.
- Interfaçage en Fortran (exploité), C, Petsc, Matlab/Octave et Scilab.
- Paramétrage par défaut ⁴⁷ et possibilité de laisser le package choisir certaines de ses options en fonction du type de problème, de sa nature et du nombre de processeurs.
- *Modularité* ⁴⁸ (3 phases distinctes interchangeables) et ouverture de certains arcanes numériques de MUMPS. L'utilisateur (très) avancé peut ainsi sortir du produit le résultat de certains prétraitements (scaling, pivotage, renumérotation), les modifier ou les remplacer par d'autres et les réinsérer dans la chaîne de calculs propre à l'outil.
- Différentes *stratégies de résolutions* : one-shot, multiples seconds membres, résolutions simultanées et compléments de Schur ⁴⁹.
- Différents *renuméroteurs* embarqués ou externes : METIS, AMD, QAMD, AMF, PORD, SCOTCH, 'fourni par l'utilisateur' ⁵⁰.

cement de travaux de recherche, relecture croisée de documentation... Cf. Note interne EDF H-I23-2013-03942. Solveur linéaire MUMPS: chantier logiciels dans Code_Aster, thèse de C. Weisbecker sur les compressions low-rank et partenariat EDF/INPT.

- 44. http://mumps.enseeiht.fr/ud_2013.php.
- 45. En arithmétique réelle, presque tout ce périmètre est désormais exploité régulièrement dans les codes EDF R&D
- 46. Les deux derniers modes sont exploités dans Code_Aster et pour l'instant, seul le deuxième l'est dans Code_Carmel.
- 47. Exploités dans Code_Aster et Code_Carmel. Ce principe est même décliné autant que faire se peut pour tous les autres types de paramètres (le fameux mode "AUTO" pour AUTOmatique).
- 48. Beaucoup exploités dans Code_Aster et Code_Carmel. C'est le cœur même de l'accastillage sophistiqué de MUMPS avec ces codes. Grâce à ces propriété on peut se servir de cet outil pour de multiples scénarios d'usage, et, on peut ménager différents niveaux d'utilisation : standard, robuste, performant, avancé, expertise...
 - 49. Les trois derniers modes sont exploités dans Code_Aster, les deux premiers, dans Code_Carmel.
- 50. Tous sont potentiellement appelables dans les couplages de Code_Aster et Code_Carmel avec MUMPS, sauf le dernier mode.

- Fonctionnalités connexes ⁵¹ : détection de petits pivots, calcul de rang/noyaux et calcul de solution régulière, analyse d'erreur sur la solution.
- *Pré- et post-traitements* ⁵² : mise à l'échelle, pivotage statique et dynamique, permutation ligne/colonne et scalaire/bloc 2x2, raffinement itératif.
- Parallélisme ⁵³: potentiellement à 2 niveaux (MPI+theads des BLAS3), gestion asynchrone des flots de tâches/données et leur réordonnancement dynamique, recouvrement calcul/communication; Distribution des données associée à la distribution des tâches; Ce parallélisme ne commence, pour l'instant, qu'au niveau de la phase de factorisation.
- *Mémoire* ⁵⁴ : déchargement sur disque ou non de la factorisée (modes In-Core ou Out-Of-Core) avec estimation préalable des consommations RAM par processeur dans les deux cas; Le mode OOC ne commence, pour l'instant, qu'au niveau de la phase de factorisation.

En terme de parallélisme, MUMPS exploite deux niveaux : l'un externe lié à l'élimination concurrente de fronts (via MPI), l'autre interne, au sein de chaque front (via des BLAS "threadées"). C'est ce type de parallélisme hybride relativement souple, efficace et "presse-bouton" qu'on souhaite mettre en place prochainement dans Code_Carmel. De plus, il est suffisamment ergonomique pour pouvoir se propager en amont et en aval des simples aspects solveurs (construction de la matrice, post-traitements). Et ce, au grand bénéfice des utilisateurs et avec relativement peu d'impacts pour les développeurs.

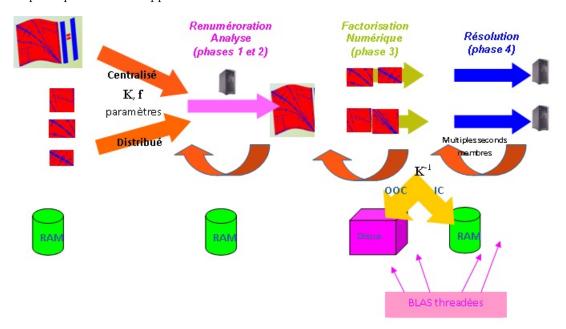


Figure 15.14 – Organi
gramme fonctionnel de MUMPS : ses trois étapes en parallèle centralisé/distribué et IC/OOC.

15.3.5.3 Atouts et spécificités

15.3.5.3.1 Pivotage

La technique de pivotage consiste à choisir un terme $\tilde{\mathbf{A}}_k(k,k)$ adapté (dans la formule 15.27) pour éviter de diviser par un terme trop petit (ce qui amplifierait la propagation des erreurs

^{51.} Exploité dans certaines fonctionnalités de Code_Aster et souvent indispensable pour Code_Carmel (modé-lisation non jaugée).

^{52.} Exploité (et souvent indispensable pour les modélisations difficiles) dans Code_Aster et Code_Carmel.

^{53.} Exploité, pour l'instant, uniquement dans Code_Aster.

^{54.} Exploité de toutes les façons possibles par Code_Aster/Carmel : choix laissé à l'appréciation de l'utilisateur, choix automatique et pré-estimations mémoire.

d'arrondi lors du calcul des termes $\tilde{\mathbf{A}}_{k+1}(i,j)$ suivants). Pour ce faire, on permute des lignes (pivotage partiel) et/ou des colonnes (resp. total) pour trouver le dénominateur de 15.27 adapté. Par exemple, dans le cas d'un pivotage partiel, on choisit comme "pivot" le terme $\tilde{\mathbf{A}}_k(r,k)$ tel que :

$$\tilde{\mathbf{A}}_{k}\left(r,k\right) > u\max_{i}\left|tilde\mathbf{A}_{k}\left(i,k\right)\right| \quad \text{avec}u \in \left]0,1\right[$$
(15.30)

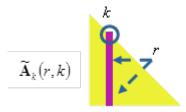


Figure 15.15 – Choix du pivot partiel à l'étape k.

D'où une amplification des erreurs d'arrondi au maximum de $(1+\frac{1}{u})$ à cette étape. Ce qui est important ici ce n'est pas tant de choisir le terme le plus grand possible en valeur absolu (u=1) que d'éviter de choisir le plus petit! L'inverse de ces pivots intervient aussi lors de la phase de descente-remontée, donc il faut ménager ces deux sources d'amplification d'erreurs en choisissant un u médian. MUMPS, comme beaucoup de package, propose par défaut u=0.01 (paramètre MUMPS CNTL(1)). Pour pivoter on utilise généralement des termes diagonaux scalaires mais aussi des blocs de termes (des blocs diagonaux 2x2).

Dans MUMPS, deux types de pivotage sont mis en œuvre, l'un dit 'statique' (lors de la phase d'analyse), l'autre dit 'numérique' (resp. factorisation numérique). Ils sont paramétrables et activables séparément (cf. paramètres MUMPS CNTL(1), CNTL(4) et ICNTL(6)). Pour des matrices SPD ou à diagonale dominante, ces facultés de pivotage peuvent être désactivées sans risque (le calcul y gagnera en rapidité), par contre, dans les autres cas de figure, il faut les initialiser pour gérer les éventuels pivots très petits ou nuls. Cela implique en général un surcroît de remplissage de la factorisée mais accroît la stabilité numérique.

Remarque 15.3.12 Cette fonctionnalité de pivotage rend MUMPS indispensable pour traiter les modélisations singulières de Carmel (et certaines de Code_Aster).

Remarque 15.3.13 L'utilisateur Carmel n'a pas accès directement à ce paramétrage fin. Ils sont activés avec des valeurs par défaut. Il peut juste choisir de les débrancher partiellement en posant mumps_pre = 'OFF'. Par défaut il est fixé à 'AUTO'.

Remarque 15.3.14 Pour nos simulations industrielles (Carmel, Aster ou TELEMAC) il n'est pas prudent de se priver du pivotage numérique voire d'activer du pivotage statique. Ce type de paramétrage est à privilégier uniquement dans le cadre de tests.

Remarque 15.3.15 Le surcroît de remplissage dû au pivotage numérique doit s'ordonnancer au plus tôt dans MUMPS (dès la phase d'analyse). Et ce, en prévoyant arbitrairement un pourcentage de surconsommation mémoire par rapport au profil prévu. Ce chiffre doit être renseigné en pourcents dans le paramètre MUMPS ICNTL(14). Il est accessible à l'utilisateur Carmel via le mot-clé mumps_pivot (20% par défaut).

Remarque 15.3.16 L'utilisateur peut avoir à modifier ce chiffre (on peut monter jusqu'à 100% voire plus), et ce, surtout lorsqu'on fixe le mode de gestion mémoire (mumps_memory = 'IC' ou 'OOC'). En mode automatique (mumps_memory = 'AUTO'), on pré-estime et fournit à MUMPS tous l'espace RAM disponible afin qu'il organise mieux ses sur-allocations mémoires inopinées dues au pivotage. Du coup, ce type de problème ('pas assez d'espace supplémentaire pour le pivotage') survient beaucoup moins souvent. Et lorsqu'il apparaît, le mode 'AUTO' augmente, de manière

transparente pour l'utilisateur, et retente la factorisation numérique. En cas d'échec on recommence plusieurs fois ⁵⁵, en doublant à chaque fois la valeur. Cette procédure d'auto-correction est activée par défaut (paramètre Lmumps_autocorrec = .true.) et permet à l'utilisateur d'intervenir le moins possible pour gérer ces contingences "informatico-numériques".

15.3.5.3.2 Raffinement itératif

En fin de résolution, ayant obtenu la solution \mathbf{u} du problème, on peut évaluer facilement son résidu $\mathbf{r} := \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{f}$. Connaissant déjà la factorisée de la matrice, ce résidu peut alors alimenter à peu de frais le processus itératif d'amélioration suivant (dans le cas général non symétrique) :

Boucle en i
$$(1) \mathbf{r}^{i}i = \mathbf{f}^{i} - \mathbf{K}\mathbf{u}^{i}$$

$$(2) \mathbf{L}\mathbf{U}\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}^{i} = \mathbf{r}^{i}$$

$$(3) \mathbf{u}^{i+1} \Leftarrow \mathbf{u}^{i} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}^{i}$$

$$(15.31)$$

Ce processus est "relativement" ⁵⁶ indolore puisqu'il ne coûte principalement que le prix des descente-remontées de l'étape (2). Il peut ainsi s'itérer jusqu'à un certain seuil ou jusqu'à un nombre d'itérations maximum. Si le calcul de résidu ne comporte pas trop d'erreur d'arrondi, c'est-à-dire si l'algorithme de résolution est plutôt fiable (cf. paragraphe suivant) et que le conditionnement du système matriciel est bon, ce processus de raffinement itératif ⁵⁷ est très bénéfique sur la qualité de la solution.

Dans MUMPS ce processus est activable ou non (paramètre ICNTL(10) < 0) et borné par un nombre d'itérations maximum N_{err} (ICNTL(10)). Le processus 15.31 se poursuit tant que le "résidu équilibré" \mathbf{B}_{err} est supérieur à un seuil paramétrable seuil (CNTL(2), fixé par défaut à $\sqrt{\varepsilon}$ où ε est la précision machine) :

$$\mathbf{B}_{err} := \max_{j} \frac{|\mathbf{r}_{j}^{i}|}{(|\mathbf{K}||\mathbf{u}^{i}| + |\mathbf{f}|)_{i}}$$
(15.32)

ou qu'il ne décroît pas d'un facteur au moins 5 (non paramétrable). En général, une ou deux itérations suffisent. Si ce n'est pas le cas, c'est souvent révélateur d'autres problèmes : mauvais conditionnement ou erreur inverse (cf. paragraphe suivant).

Remarque 15.3.17 Pour l'utilisateur Carmel ces paramètres MUMPS ne sont pas directement accessibles. La fonctionnalité n'est activée que s'il choisit sciemment d'estimer et de tester la qualité de sa solution (cf. paragraphe suivant). Par exemple via le paramètre post_mumps = 'AUTO' 'FORCE'. Dans ces scénarios pré-paramétrés, cette valeur est initialisée soit à 'OFF' ($N_{err}=0$ / $seuil=10^{+50}$), 'FORCE' ($N_{err}=10$ / $seuil=10^{-50}$) ou 'AUTO' ($N_{err}=4$ / $seuil=10^{-14}$).

Remarque 15.3.18 Le nombre d'itérations réellement effectuées est tracé dans le bloc d'affichage MUMPS.

Remarque 15.3.19 Cette fonctionnalité est présente dans de nombreux packages : Oblio, PAR-DISO, UFMPACK, WSMP, PaStiX ...

15.3.5.3.3 Fiabilité des calculs

Pour estimer la qualité de la solution d'un système linéaire, MUMPS propose des outils numériques déduits de la théorie de *l'analyse inverse des erreurs d'arrondi initiée par Wilkinson* (1960). Dans cette théorie, les erreurs d'arrondi dues à plusieurs facteurs (troncature, opération en arithmétique finie..) sont assimilées à des perturbations sur les données initiales.

Cela permet de les comparer à d'autres sources d'erreurs (mesure, discrétisation...) et de les manipuler plus facilement via trois indicateurs obtenus en post-traitement :

^{55.} Jusqu'à 4 fois.

^{56.} En mode OOC cette fonctionnalité peut s'avérer très coûteuse suivant la rapidité des accès disques. On préfère alors souvent la débrancher sauf si on cherche absolument à privilégier la qualité du résultat.

^{57.} On parle aussi "d'amélioration itérative" ('iterative refinement').

- Le conditionnement cond(**K**,**f**): il mesure la sensibilité du problème aux données (problème instable, mal formulé/discrétisé...). C'est-à-dire, le facteur multiplicatif que la manipulation des données va opérer sur le résultat. Pour l'améliorer, on peut essayer de changer la formulation du problème ou d'équilibrer les termes de la matrice, en dehors de MUMPS ou via MUMPS (mumps_pre ='AUTO').
- L'erreur inverse be(**K**,**f**) ('backward error') : elle mesure la propension de l'algorithme de résolution à transmettre/amplifier les erreurs d'arrondi. Un outil est dit "fiable" lorsque ce chiffre est proche de la précision machine. Pour l'améliorer, on peut essayer de changer d'algorithme de résolution ou de modifier une ou plusieurs de ses étapes (dans Code_Carmel on peut jouer sur les paramètres mumps_post ou mumps_renum).
- L'erreur directe $fe(\mathbf{K}, \mathbf{f})$ ('forward error') : elle est le produit des deux chiffres précédents et fournit un majorant de l'erreur relative sur la solution.

$$\frac{\|\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} < \underbrace{\operatorname{cond}(\mathbf{K}, \mathbf{f}) \times \operatorname{be}(\mathbf{K}, \mathbf{f})}_{\text{fe}(\mathbf{K}, \mathbf{f})}$$
(15.33)

On peut donner une représentation graphique (cf. figure 15.16) de ces notions en exprimant l'erreur inverse comme l'écart entre les données initiales "exactes" (\mathbf{f}) et celles " effectivement manipulées" ($\mathbf{f} + \delta \mathbf{f}$), tandis que l'erreur directe mesure l'écart entre la solution "exacte" (\mathbf{u}) et la solution réellement obtenue ($\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}$), celle du problème perturbé par les erreurs d'arrondi.

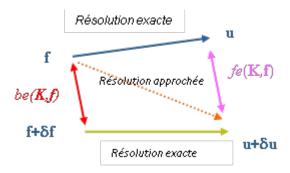


Figure 15.16 – Représentation graphique des notions d'erreurs directe et inverse.

Dans le cadre des systèmes linéaires, l'erreur inverse se mesure via le résidu équilibré :

be
$$(\mathbf{K}, \mathbf{f}) := \max_{j \in J} \frac{|\mathbf{f} - \mathbf{K}\mathbf{u}|_j}{(|\mathbf{K}||\mathbf{u}| + |\mathbf{f}|)_j}$$
 (15.34)

On ne peut pas toujours l'évaluer sur tous les indices $(J \neq [1, N]_N)$. En particulier lorsque le dénominateur est très petit (et le numérateur non nul), on lui préfère la formulation (avec J^* tel que $J \cup J^* = [1, N]_N$):

$$be^{*}(\mathbf{K}, \mathbf{f}) := \max_{j \in J^{*}} \frac{|\mathbf{f} - \mathbf{K}\mathbf{u}|_{j}}{(|\mathbf{K}||\mathbf{u}|)_{i} + ||\mathbf{K}_{j.}||_{\infty} ||\mathbf{u}||_{\infty}}$$
(15.35)

où \mathbf{K}_{j} représente la j-ième ligne de la matrice \mathbf{K} . A ces deux indicateurs, on associe deux estimations du conditionnement matriciel (l'un lié aux lignes retenues dans l'ensemble \mathbf{J} et l'autre à son complémentaire \mathbf{J}^*) : $\mathrm{cond}(\mathbf{K},\mathbf{f})$ et $\mathrm{cond}^*(\mathbf{K},\mathbf{f})$.

La théorie nous fournit alors les résultats suivant :

— La solution approchée **u** est la solution exacte du problème perturbé :

$$(\mathbf{K} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{K}) \mathbf{u} = (\mathbf{f} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{f})$$
avec $\boldsymbol{\delta}\mathbf{K}_{ij} \le \max(\text{be}, \text{be}^*) |\mathbf{K}_{ij}|$
et $\boldsymbol{\delta}\mathbf{f}_i \le \max(\text{be}.\mathbf{f}_i, \text{be}^*. ||\mathbf{K}_{i.}||_{\infty} ||\mathbf{u}||_{\infty})$

$$(15.36)$$

— On a la majoration suivante (via l'erreur directe $fe(\mathbf{K}, \mathbf{f})$) sur l'erreur relative en solution :

$$\frac{\|\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} < \underbrace{\operatorname{cond} \times \operatorname{be} + \operatorname{cond}^* \times \operatorname{be}^*}_{\text{fe}(\mathbf{K}, \mathbf{f})}$$
(15.37)

En pratique, on scrute surtout cette dernière estimation $fe(\mathbf{K},\mathbf{f})$ et ses composantes. Son ordre de grandeur indique grosso-modo le nombre de décimales "vraies" de la solution calculées. Pour les problèmes "très" singuliers de Carmel, une tolérance de 10^{-3} n'est pas rare.

Remarque 15.3.20 Pour l'utilisateur Code_Carmel ces paramètres MUMPS sont calculés et affichés dans le bloc d'affichage 'MONITORING DE LA RESOLUTION GLOBALE MUMPS...' dès que ce besoin d'informations a été sollicité (paramètre Imonitoring_systeme > 1 en solveur, > 2 en préconditionneur). Car son coût peut être non négligeable : entre 10% et 30% du coût total (surtout en OOC).

Remarque 15.3.21 L'activation de cette fonctionnalité n'est pas forcément indispensable lorsque la solution recherchée est elle-même corrigée par un autre processus algorithmique (algorithme de Newton...). Bref, en non-linéaire, on peut souvent s'en passer (mumps_post = 'OFF'). Surtout si on fait déjà l'approximation de mutualiser les aspects solveurs linéaires (factorisée ou préconditionneur) entre plusieurs itérations du solveur non linéaire (reacprecond_methodeNL > 0).

Remarque 15.3.22 Si l'utilisateur Code_Carmel a activé cette vérification automatique de la qualité (mumps_post différent de 'OFF') et qu'elle est supérieure au critère fixé par kEpsilonMUMPS > 0 (10^{-6} par défaut), le calcul s'arrête en erreur fatale. Si la valeur kEpsilonMUMPS < 0, on estime la qualité de la solution (et éventuellement on l'affiche) mais on ne la teste pas et on ne s'arrête pas. Des warnings peuvent apparaître si les valeurs de ces paramètres paraissent suspectent (par exemple, kEpsilonMUMPS > 0 et mumps_post = 'OFF').

Remarque 15.3.23 Ce type de fonctionnalité semble peu présent dans les librairies : LAPACK, Nag, HSL ...

15.3.5.3.4 Gestion mémoire

On a vu que l'inconvénient majeur des méthodes directes réside dans la taille de la factorisée. Pour permettre de passer en mémoire vive des systèmes plus grands, MUMPS propose de décharger cet objet sur disque : c'est le mode Out-Of-Core (OOC) par opposition au mode In-Core (IC) où toutes les structures de données résident en RAM. Ce mode d'économie de la RAM est complémentaire de la distribution de données qu'induit naturellement le parallélisme. La plus-value de l'OOC est donc surtout prégnante pour des nombres de processeurs modérés (<32 processeurs).

D'autre part, l'équipe MUMPS a été très attentive au surcoût CPU engendré par cette pratique. En retravaillant dans l'algorithmique du code, les manipulations des entités déchargées, ils ont pu limiter au strict minimum ces surcoûts (quelques pourcents et surtout dans la phase de résolution).

Remarque 15.3.24 Les paramètres MUMPS ICNTL(22)/ICNTL(23) permettent de paramétrer différents modes de gestion mémoire. L'utilisateur Carmel n'y a directement accès que via le mot clé mumps_memory ('IC'/'OOC'/'AUTO'). Pour la valeur 'AUTO', on choisit dynamiquement entre la valeur IC et OOC suivant la mémoire disponible sur le nœud courant. En cas de problème, si Lmumps_autocorrec = .true., on essaie de corriger dynamiquement (cf. paragraphe 15.3.5.3.1).

Remarque 15.3.25 Lorsque le mode automatique est requis, si un problème informatique empêche l'évaluation de la RAM disponible, on se reporte vers le choix conservatif de l'OOC.

Remarque 15.3.26 Le déchargement sur disque est entièrement contrôlé par MUMPS (nombre de fichiers, fréquence déchargement/rechargement...). On renseigne juste l'emplacement mémoire : c'est tout naturellement le répertoire de travail de l'exécutable propre à chaque processeur (défini par %OOC_TMPDIR = '.'). Ces fichiers sont automatiquement effacés par MUMPS lorsqu'on détruit l'occurrence associée. Cela évite donc un engorgement du disque lorsque différents systèmes sont factorisés dans une même résolution.

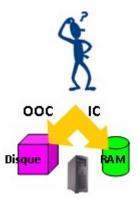


Figure 15.17 – Deux types de gestion mémoire : entièrement en RAM (IC) et RAM/disque (OOC).

Remarque 15.3.27 D'autres stratégies d'OOC seraient envisageables voire sont déjà codées dans certains packages (PaStiX, Oblio, TAUCS...). On pense en particulier au fait de pouvoir moduler le périmètre des objets déchargés voire de pouvoir les réutiliser sur disque lors d'une autre exécution. Cette dernière stratégie s'avérerait très précieuse pour certains usages de Carmel.

15.3.5.3.5 Gestion des matrices singulières

Un des gros points forts du produit est sa gestion des singularités. Il est non seulement capable de détecter les singularités numériques ⁵⁸ d'une matrice et d'en synthétiser l'information pour un usage externe (calcul de rang, avertissement à l'utilisateur, affichage d'expertise...), mais en plus, malgré cette difficulté, il calcule une solution "régulière ⁵⁹" voire tout ou partie du noyau associé.

Ces nouveaux développements étaient un des livrables de l'ANR SOLSTICE. Nous les avions demandés à l'équipe MUMPS (en partenariat avec l'équipe Algo du CERFACS) pour rendre ce produit iso-fonctionnel par rapport aux autres solveurs directs de Code Aster.

Cette fonctionnalité trouve un deuxième champ d'application avec les modélisations potentiellement numériquement singulières de Code_Carmel. Hormis les solutions itératives déjà intégrées au code, MUMPS est probablement l'un des rares produits armés pour résoudre ce type de difficultés. Les tests conduits lors de ce chantier logiciel complètent ainsi l'évaluation menée lors de l'ANR et le REX d'usage dans Code_Aster. D'autre part, là encore, les besoins Carmel/Aster se complètent :

- Pour Code Carmel il s'agit de trouver une solution possible du problème,
- Pour Code_Aster, cette situation est souvent considérée comme pathologique. On souhaite alors avertir l'utilisateur d'un problème dans sa mise en données (condition limite, contact..) ou renvoyer un signal à l'algorithmique (raffinement du pas de temps...).

Et en pratique, comment MUMPS procède-t-il?

A gros traits, lors de la construction de la matrice factorisée, il détecte les lignes comportant des pivots 60 très petits (par rapport au un critère CNTL(3) 61). Il les répertorie dans le vecteur PIVNUL_LIST(1 : INFOG(28)) et, suivant le cas de figure, soit il les remplace par une valeur pré-fixée (via CNTL(5) 62), soit il les stocke à part. Le bloc ainsi constitué (de plus petite taille) subira ultérieurement un algorithme QR ad hoc.

^{58.} Les paramètres MUMPS ICNTL(13) /ICNTL(24) / ICNTL(25) et CNTL(3) / CNTL(5) permettent de paramétrer ces fonctionnalités. Ils ne sont pas modifiables par un usage standard de Code_Carmel. Par prudence, on garde la fonctionnalité activée en permanence.

^{59.} C'est une solution possible du problème du moment que le second membre $\mathbf{f} \in \ker \left(\mathbf{K}^T\right)^T$. Ce qui dans notre cas symétrique revient à f élément de l'espace image.

^{60.} Il s'agit, en toute rigueur, de la norme infinie de la ligne de la matrice de travail comportant le pivot.

^{61.} Par défaut on le fixe à 10^{-8} (en double précision) et 10^{-4} (en simple) car ces chiffres représentent (empiriquement) une perte d'au moins la moitié du niveau de précision si on poursuit quand même la factorisation.

^{62.} Cette valeur doit être assez grande pour limiter l'impact de cette modification sur le reste de la factorisation. Dans Carmel, on la fixe à $10^6 \|\mathbf{K}_{\text{travail}}\|$.

Et pour finir, les itérations de raffinement itératifs viennent compléter cet écheveau. Comme elles n'utilisent cette factorisée "retouchée" uniquement que comme préconditionneur, et qu'elles bénéficient, par contre, de l'information exacte du produit matrice-vecteur, elles ramènent la solution "biaisée" ⁶³ dans le bon chemin!

Remarque 15.3.28 Les paramètres MUMPS ICNTL(13) / ICNTL(24) / ICNTL(25) et CNTL(3) / CNTL(5) permettent de paramétrer ces fonctionnalités. Ils ne sont pas modifiables par un usage standard de Code_Carmel. Par prudence, on garde la fonctionnalité activée en permanence.

Remarque 15.3.29 Cette fonctionnalité peut aussi s'avérer précieuse en décomposition de domaine (solveur linéaire de type FETI, préconditionneur) et en calcul modal (filtrage des modes rigides).

15.3.6 Implantation de MUMPS dans code_Carmel

15.3.6.1 Compatibilité des versions et copyright

Le copyright du produit MUMPS (repris au paragraphe K) doit être joint à la documentation théorique et/ou au manuel utilisateur de Code_Carmel. Il rappelle la paternité du produit et les conditions de son usage.

Les principales fonctionnalités de MUMPS viennent d'être décrites dans les paragraphes précédents. Leurs liens avec le paramétrage propre à Code_Carmel ainsi que des comparaisons avec d'autres usages EDF R&D (Code_Aster, TELEMAC...) ou des outils comparables (PaStiX, Pardiso...) ont aussi été mentionnés.

Ces paramètres, modifiables explicitement dans le fichier configuration.F90 ⁶⁴, ne sont licites que si Code_Carmel a été linké au préalable à MUMPS (cf. makefile et variable USE_MUMPS).

Les versions compatibles de MUMPS sont la v4.9.2 et la v4.10.0. Nul besoin de faire remonter la compatibilité trop longtemps en arrière. La plus ancienne version de MUMPS avec laquelle nous assurons la compatibilité date déjà de novembre 2009!

Et de toute façon, ce n'est qu'à partir de cette version que MUMPS a stabilisé des fonction-nalités cruciales pour les besoins de Code_Carmel : gestion des systèmes singuliers, gestion de la mémoire Out-Of-Core et pré-allocation des besoins mémoire.

Cette compatibilité est testée à chaque initialisation de système linéaire (cf. routine InitializeOccMUMPS) mais elle n'est affichée dans le .log que la première fois ⁶⁵. En cas d'incompatibilité de version on émet un message dédié.

15.3.6.2 Choix ergonomiques

En fait, MUMPS est plus une toolkit qu'un produit dédié à une seule tâche. Ses points d'entrée sont nombreux (une cinquantaine de paramètres) et ses interactions multiples (jeux de paramètres combinés, une centaine de messages et de warnings). Bref, la combinatoire des choix possibles reste importante. Aussi est-il préférable de soulager l'utilisateur Code_Carmel et d'agglomérer ces paramètres afin de lui ménager une API minimale.

Par conséquent, on a simplifié et regroupé ces paramètres MUMPS en seulement huit paramètres Code_Carmel. Ce choix de grouper ce riche paramétrage en sous-catégories (souvent pré-paramétrée et activée dynamiquement), permet à l'utilisateur d'accéder graduellement à cette fonctionnalité.

Suivant son expertise, ses besoins et son appétence, il peut choisir le mode de fonctionnement qui lui convient le mieux : d'un usage "presse-bouton" à un usage très avancé.

La priorité lors de l'usage de MUMPS dans Code_Carmel étant :

^{63.} C'est le même mécanisme que pour le pivotage statique.

^{64.} Comme d'habitude dans Code_Carmel.

^{65.} Afin de ne pas surcharger le .log.

- "Périmètre d'utilisation maximum" et "continuité du service". Donc ne pas restreindre les usages du produit tout en essayant d'auto-corriger un maximum de problèmes internes MUMPS qui pourraient subvenir.
- Robustesse du processus numérique.
- Précision des résultats.
- Consommations en temps et en mémoire.

Lorsqu'on utilise MUMPS en tant que préconditionneur, les deux derniers objectifs sont interchangés. On cherche prioritairement à effectuer le plus vite possible l'étape de préconditionnement. Peu importe sa précision puisqu'on travaille déjà sur un système approximé (simple précision et relaxé) et qu'il est inséré dans un processus itératif et correctif (algorithme du GCPC).

Les paramètres internes MUMPS peuvent donc se décomposer en quatre catégories :

— Ceux préfixés "en dur" dans Code_Carmel ⁶⁶ car on connait a priori les caractéristiques du calcul et la priorité des utilisateurs lorsqu'ils utilisent MUMPS (type de système, gestion des singularités, pré et post-traitements...): un calcul plutôt robuste et sûr.

```
ICNTL: 1, 2, 3, 4, 13, 24 etc.
CNTL: 3, 5 etc.
```

— Ceux qui peuvent évoluer dynamiquement en fonction du calcul et des ressources de la machine (gestion mémoire, espace supplémentaire dédié au pivotage...).

```
ICNTL: 14, 22, 23.
```

Ceux qui sont pilotés (souvent collectivement) par l'utilisateur. Ils ont une valeur par défaut ou, a minima, un mode "AUTO" qui laisse le produit ou l'accastillage Code_Carmel
 MUMPS décider en fonction de la situation, des ressources et des produits périphériques installés ⁶⁷.

```
ICNTL: 7, 6, 8, 10, 11, 12, 14, 22, 23 etc.
CNTL: 2.
```

En outre, lorsque cela est possible, on a mis en œuvre des procédures "d'auto-correction" (si Lmumps_autocorrec = .true.) pour modifier dynamiquement ce paramétrage MUMPS lorsqu'un problème numérique ou informatique survient au fin fond du produit externe. La priorité étant d'assurer la continuité du calcul afin, par exemple, ne pas "planter" à la 500ième résolution de système linéaire juste à cause d'un espace de pivotage trop petit!

Compte-tenu des fonctionnalités embryonnaires de Code_Carmel en termes de redémarrages et de sauvegarde intermédiaires des résultats de calcul, il est indispensable d'assurer à l'utilisateur cette garantie de "continuité de services".

Remarque 15.3.30 Pré-estimation, auto-paramétrage, autocorrection... on pourrait généraliser, à termes, ce type de fonctionnement à d'autres outils numériques du code : solveur ODE et solveur non linéaire...

15.3.6.3 Paramètres code_Carmel pour utiliser MUMPS

Ces paramètres Carmel sont regroupés dans le synoptique ci-dessous (cf. figure 5.4.1). Les valeurs admissibles, conseillées et celles par défaut sont résumées dans les commentaires du fichier configuration.

En outre, le nouveau paramètre Imonitoring_systeme permet de tracer dans le .log différentes informations liées à cette étape de résolution des systèmes linéaires.

La nouvelle option TypeSolveurLineaire = 5 permet, quant à elle, de pré-évaluer les besoins mémoire (RAM et éventuellement disque) de Code_Carmel en fonction des paramètres utilisateur (dans configuration.F90 et structureDonnées.F90), des caractéristiques du problème traité et

^{66.} Dans la routine InitializeOccMUMPS.

^{67.} Renuméroteurs METIS ou SCOTCH.



Figure 15.18 – Paramètres pour utiliser MUMPS dans Code_Carmel.

des solveurs linéaires disponibles (GCPC Crout/Jacobi avec, ou sans, MUMPS solveur direct et préconditionneur).

L'utilisateur peut ainsi, dans un premier temps et pour une étude donnée, calibrer son jeu de paramètres vis-à-vis des ressources mémoires disponibles de sa machine. Ensuite, il lance le calcul avec le paramétrage le plus adapté à la situation.

Ce mode de fonctionnement peut même servir, tout simplement, à pré-tester son jeu de données et son installation. Si Code_Carmel parvient à pré-évaluer toutes les consommations mémoire c'est très bon signe! Le code est très probablement fonctionnel sur cette plate-forme et le jeu de données probablement licite! Puisqu'on a réussi à lire les données, à construire la matrice et, le cas échéant (si MUMPS est installé), à la faire analyser par MUMPS.

C'est un (léger) dévoiement de cette fonctionnalité qui peut s'avérer très utile en pratique : puisqu'elle coûte souvent moins cher qu'une portion de l'étude.

15.3.6.4 Warnings et remontée d'erreurs MUMPS

Le produit MUMPS est susceptible de faire remonter à son utilisateur une centaine de message d'erreurs et de warnings. Bien sûr, il n'est pas question, ni de fournir un code retour MUMPS "sec" à l'utilisateur Carmel, ni de "customiser" ⁶⁸ précisément chacune des possibilités .

Nous avons donc choisi la voie médiane :

- *Auto-corriger*, autant que faire se peut, un maximum de paramètre (cf. paragraphe précédent);
- Regrouper par catégorie ces messages afin de faire remonter à l'utilisateur final Carmel un message simple, clair et exploitable. Généralement, soit on prodigue quelques conseils pour relancer le calcul, soit on propose de contacter l'équipe de développement : sous-entendu : cette étude a peut-être mis en évidence un bug à instruire ⁶⁹.

15.4 Organisation des calculs avec MUMPS

Pour la mise en place des calculs avec MUMPS, la priorité a été mise sur la modularité, la lisibilité et l'AQ. Dix nouvelles routines ont été créées a cette fin. Les grandes lignes de cet accastillage sont décrites dans les paragraphes qui suivent.

^{68.} Inutile et rapidement ingérable lorsqu'on veut être compatible avec plusieurs versions.

^{69.} Dans MUMPS (ou ses dépendances), dans l'accastillage Code_Carmel - MUMPS ou dans Code_Carmel.

15.4.1 Initialisation

Lors de l'initialisation de la structure de données Carmel⁷⁰ contenant les données propres au système linéaire (matrice, RHS ⁷¹...), on initialise aussi l'occurrence MUMPS associée ⁷² (matrice, RHS...). Celle-ci assure le dialogue avec les fonctionnalités numériques du produit. Elle contient les paramètres de contrôle de ses fonctionnalités numériques : 15 réels et 44 entiers.

Cette initialisation s'effectue via un appel à

Dès qu'on a fini de se servir de cette occurrence, on est censé la détruire (via CleanOccMUMPS) pour gagner en place mémoire (RAM et disque) et pour éviter d'éventuelles confusions. En effet, par soucis de simplicité, il doit y avoir bijection entre un "système" Carmel et une occurrence MUMPS. Cette dernière ne peut être, par exemple, agrandie une fois qu'elle a été créée. Si le système Carmel change, l'occurrence MUMPS doit être détruite puis recréée.

Remarque 15.4.1 S'il existe déjà une occurrence MUMPS associée à système, la routine s'arrête en erreur. Il faut la détruire au préalable via un CleanOccMUMPS.

Remarque 15.4.2 Il faut appeler cette routine avant de remplir la matrice et le RHS MUMPS.

Remarque 15.4.3 De nombreux warnings peuvent être émis lors de l'exécution de cette routine : contrôle du paramétrage, des versions, de l'installation...

Remarque 15.4.4 Cette initialisation se produit que si Code_Carmel a été linké au produit externe et que la fonctionnalité paramétrée le requiert (TypeSolveurLineaire = 3, 4 ou 5).

Remarque 15.4.5 Contrairement à Code_Aster, on ne limite pas le nombre d'occurrences simultanées pouvant exister en mémoire. Cela ne pose pas problème (par exemple, pas assez de mémoire) pour l'instant car on ne semble utiliser pour le moment qu'un seul système linéaire dans Code_Carmel.

15.4.2 Remplissage

Ensuite on *lit la matrice Carmel* et on analyse ses caractéristiques. Puis *on initialise celle de l'occurrence MUMPS associée* et on la remplie des termes matriciels adéquats. Ceux-ci sont éventuellement filtrés de leurs valeurs aberrantes ⁷³ et de leurs termes extra-diagonaux trop petits (si on construit un préconditionneur relaxé).

Remarque 15.4.6 S'il existe déjà une matrice MUMPS associée à ce système, la routine s'arrête en erreur. Il faut la détruire au préalable via un CleanMatrixMUMPS.

Remarque 15.4.7 Lors du filtrage, si la matrice comporte des valeurs illicites, suivant les cas de figure, on arrête le calcul en erreur fatale.

Remarque 15.4.8 Les résultats du filtrage (taille des profils Carmel / MUMPS, nombre de termes "outrange" et nombre de termes relaxés) est tracé dans le fichier .log si Imonitoring_systeme > 1 (solveur direct) ou 2 (préconditionneur).

^{70.} Structure de données appelée systeme. Elle est initialisée dans initialiserSysteme.

^{71. &#}x27;Right-Hand-Side' ou second membre.

^{72.} Celle-ci instancie un type dérivé MUMPS smumps_struc ou dmumps_struc, suivant que l'on soit en simple ou en double précision.

^{73.} Suivant l'arithmétique considérée (simple ou double précision) et la fonction recherchée (solveur direct ou simple préconditionneur).

On fait la même chose avec le second membre via

Remarque 15.4.9 S'il existe déjà un RHS MUMPS associé à système, la routine s'arrête en erreur. Il faut la détruire au préalable via un CleanRhsMUMPS.

Remarque 15.4.10 Ce remplissage du second membre de l'occurrence MUMPS peut se reporter et se faire juste avant l'étape de descente-remontée (DoSolveMUMPS).

Remarque 15.4.11 Cette modularité est très pratique lorsqu'on manipule un préconditionneur ou que l'on implémente un schéma de Newton : on peut mutualiser facilement et efficacement la même matrice pour de nombreux RHS.

15.4.3 Étapes de calcul

Les trois étapes de calcul proprement dites (décrites au paragraphe 15.3.3) s'effectuent via les appels suivant :

— Prétraitements, factorisation symbolique et renumérotation

Call DoAnalyseMUMPS(systeme,ramIC,ramOOC,diskOOC,objetMUMPS) (15.41)

— Factorisation numérique

Call DoFactorizationMUMPS(systeme,ramIC,ramOOC) (15.42)

Descente-remontée

Ensuite il faut bien sûr fournir la solution MUMPS au "monde Carmel". Cela se fait grâce à l'utilitaire suivant :

Call GiveSolutionMUMPS(systeme,
$$X$$
) (15.44)

qui remplit le vecteur Code_Carmel X avec la solution tant recherchée!

Remarque 15.4.12 Pour utiliser ces routines, l'occurrence MUMPS doit bien sûr avoir été créée et remplie.

Remarque 15.4.13 En théorie on peut mutualiser la phase d'analyse pour plusieurs factorisations. Du moins tant que seules les valeurs des termes matriciels sont modifiées. Cependant pour conserver toutes l'efficacité des prétraitements et la pertinence des "astuces d'accastillage" (préallocation mémoire, autocorrection...), il vaut mieux refaire cette étape avant chaque factorisation numérique. Le gain (en temps et en RAM) de sa mutualisation est d'ailleurs souvent faible en séquentiel. Cela sera beaucoup moins vrai en mode parallèle MPI.

Remarque 15.4.14 On peut intercaler entre 15.42 et 15.43 une étape de remplissage du RHS (cf. 15.40). Elle n'est pas requise avant cela. D'où des schémas de calcul du type 'multiple-RHS' avec lesquels on peut mutualiser la factorisation numérique pour de nombreux RHS différents.

Remarque 15.4.15 Suivant le niveau de monitoring (via Imonitoring_systeme) et suivant l'usage recherché (solveur direct ou préconditionneur), chacune de ces étapes trace différents éléments : estimations des besoins mémoire, temps consommés, procédure d'autocorrection activée, expertises numériques, caractéristiques du système...

Remarque 15.4.16 Les très gros objets MUMPS contenant la factorisée ⁷⁴ ne sont pas détruits tant qu'on n'a pas détruit l'occurrence (CleanOccMUMPS) ou retenté une factorisation (DoFactorisationMUMPS). Car ils sont susceptibles d'être réutilisés sur de nouveaux RHS.

15.4.4 Nettoyage

La destruction des objets et de l'occurrence MUMPS s'effectue via les appels suivant :

— Matrice MUMPS

Call CleanMatrixMUMPS(systeme) (15.45)

— RHS MUMPS

Call CleanRhsMUMPS(systeme) (15.46)

— Occurrence MUMPS

Call CleanOccMUMPS(systeme) (15.47)

Remarque 15.4.17 Pour utiliser ces routines, l'occurrence MUMPS doit bien sûr avoir été créée et remplie.

Remarque 15.4.18 La destruction de l'occurrence MUMPS doit être la dernière étape d'un schéma de calcul utilisant ce produit externe.

^{74.} En RAM et sur disque (si l'OOC a été activé).

Chapitre 16

Discrétisation temporelle

16.1 Cas particulier du problème harmonique

Cinquième partie Exploitation des résultats

Chapitre 17

Calculs des forces

Résumé

Les efforts magnétiques exercés sur les parties mobiles d'un système électromagnétique constituent des grandeurs importantes pour l'étude de son fonctionnement. C'est le cas du couple pulsatoire dans les machines tournantes ou des forces qui s'exercent à la surface d'un matériau magnétique.

Sous forme globale, ces grandeurs peuvent servir aussi à un couplage avec les équations de la mécanique (calcul de la vitesse et de la position) [Vassent 1990] [Ren, Razek 1994]. Au niveau local, les résultats servent à prédire les déformations que peut subir le système [Ren, Razek 1992], [Ren et al 1992], [Henneberger, Hadrys 1993].

Pour déterminer ces efforts, plusieurs méthodes de calcul peuvent être employées. Parmi ces méthodes, on trouve celles qui sont basées sur le calcul de la densité de force (distribution de la force locale à la surface). La force globale est alors obtenue par une somme des forces locales. Ces méthodes utilisent des concepts basés sur les sources équivalentes (charges ou courants magnétiques), la dérivée de l'énergie magnétique ou le tenseur de Mawxell [Coulomb 1983], [Ren, Razek 1992], [Sadowski et al 1992], [Ren 1994]. Dans un calcul par la méthode des éléments finis, ces techniques utilisent la distribution des grandeurs locales dans le domaine étudié.

Dans ce travail, nous nous intéresserons au calcul global de la force et du couple par deux méthodes : le tenseur de Maxwell et les travaux virtuels. Ces calculs sont présentés pour les structures 2D et 3D avec une discrétisation, par la méthode des éléments finis, des équations du champ électromagnétique [Boualem, Piriou 1996].

17.1 Méthode du tenseur de Maxwell

17.1.1 Principe

Nous désirons calculer les forces et le couple qui s'exercent sur une partie \mathcal{D}' du domaine étudié \mathcal{D} . Cette région est limitée par une surface Γ . Le système peut contenir des matériaux magnétiques (linéaires ou non-linéaires), des conducteurs ou des régions inductrices caractérisées par une densité de courant uniforme (cf. figure 17.1).

Ce calcul est effectué par l'application du tenseur de Maxwell \mathbf{T} qui est défini dans le vide (ou milieu équivalent) par l'expression suivante [Durand 1968] :

$$\mathbf{T}_{i,j} = \mu_0 \left(h_i \ h_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \ h^2 \right)$$
 (17.1)

Le tenseur de Maxwell permet de calculer la force qui s'exerce sur le domaine \mathcal{D}' par une intégrale étendue à une surface Γ' qui l'entoure :

$$\mathbf{F} = \int_{\mathcal{D}'} \operatorname{div} \mathbf{T} \, d\mathcal{D}' = \oint_{\Gamma'} \mu_0 \, \left((\mathbf{h} \cdot \mathbf{n}) \, \mathbf{h} - \frac{1}{2} |h|^2 \, \mathbf{n} \right) d\Gamma'$$
 (17.2)

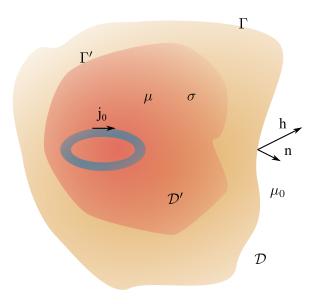


Figure 17.1 – Application du tenseur de Maxwell.

La surface Γ' peut être quelconque à condition qu'elle soit définie complètement dans le vide (ou milieu équivalent). Elle doit aussi englober toute la région qui nous intéresse. $\mathbf n$ représente la normale sortante à cette surface. A partir de l'expression précédente, on peut aussi déduire la valeur du couple C:

$$C = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \oint_{\Gamma'} \mu_0 \left((\mathbf{h} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{r} \times \mathbf{h}) - \frac{1}{2} |h|^2 (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \right) d\Gamma'$$
 (17.3)

 ${\bf r}$ est le vecteur qui relie l'élément d'intégration " $d\Gamma'$ " à l'axe de rotation.

17.1.2 Discrétisation

Pour la modélisation numérique des systèmes électrotechniques, on est amené à approcher les intégrales donnant les valeurs de la force (17.2) ou du couple (17.3) par une somme finie effectuée sur la surface Γ' . En conséquence, cette dernière est représentée par un assemblage de " N_e " éléments surfaciques en 3D ou linéiques en 2D. De telles entités sont obtenues par l'intersection du maillage éléments finis avec la surface Γ' . De ce fait, seule une partie des éléments du maillage est concernée par le calcul de la force ou du couple. En ce qui concerne le champ magnétique \mathbf{H} , il est remplacé par son approximation numérique sur chaque élément.

On cherche à déterminer les composantes de la force \mathbf{F}^T (F_x, F_y, F_z) et le couple. Ce dernier est calculé pour une rotation du domaine \mathcal{D}' autour de l'axe oz. Il n'a alors qu'une seule composante, notée C_z , L'utilisation des éléments tétraèdriques du premier ordre suppose une variation linéaire du potentiel considéré. Le champ magnétique est alors constant dans chaque élément pour des tétraèdres. Pour un élément de surface Γ'^e , les composantes du champ et de la normale sortante sont, respectivement, h^{eT} (h_x^e, h_y^e, h_z^e) et n^{eT} (n_x^e, n_y^e, n_z^e) . On note que le choix d'une surface élémentaire plane implique une normale sortante unique. En utilisant les notations précédentes dans

la relation (17.2), nous pouvons alors écrire les composantes de la force ${\bf F}$ sous la forme matricielle suivante (voir annexe ${\bf M}$) :

$$F_s = \frac{\mu_0}{2} \sum_{e=1}^{N_e} \Gamma^{e} \mathbf{H}^{eT} \mathbf{M}_s \mathbf{H}^e \quad s = x, y, z$$
 (17.4)

Pour chaque composante de la force \mathbf{F} , la matrice \mathbf{M}_{\circ}^{e} s'écrit :

$$\mathbf{M}_{x}^{e} = \begin{bmatrix} n_{x}^{e} & 0 & 0 \\ 2n_{y}^{e} & -n_{x}^{e} & 0 \\ 2n_{z}^{e} & 0 & -n_{x}^{e} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{y}^{e} = \begin{bmatrix} -n_{y}^{e} & 2n_{x}^{e} & 0 \\ 0 & n_{y}^{e} & 0 \\ 0 & 2n_{z}^{e} & -n_{y}^{e} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{z}^{e} = \begin{bmatrix} -n_{z}^{e} & 0 & 2n_{x}^{e} \\ 0 & -n_{z}^{e} & 2n_{z}^{e} \\ 0 & 0 & n_{z}^{e} \end{bmatrix}$$

$$(17.5)$$

Pour le calcul du couple, le vecteur \mathbf{r} est défini par les projections du barycentre de l'élément surfacique sur le plan Oxy, soit \mathbf{r}^{eT} $(r_x^e, r_y^e, 0)$. A partir de la relation 17.3, la composante C_z du couple peut s'écrire :

$$C_z = \frac{\mu_0}{2} \sum_{e=1}^{N_e} \Gamma^{\prime e} \left(\mathbf{h}^{eT} \, \mathbf{M}_c^e \, \mathbf{h}^e \right) \tag{17.6}$$

La matrice \mathbf{M}_c^e est donnée par l'expression suivante :

$$\mathbf{M}_{c}^{e} = r_{x}^{e} \,\mathbf{M}_{y}^{e} - r_{y}^{e} \,\mathbf{M}_{x}^{e} = \begin{bmatrix} -r_{x}^{e} \, n_{y}^{e} - r_{y}^{e} \, n_{x}^{e} & 2 \, r_{x}^{e} \, n_{x}^{e} & 0 \\ -2 \, r_{y}^{e} \, n_{y}^{e} & r_{x}^{e} \, n_{y}^{e} + r_{y}^{e} \, n_{x}^{e} & 0 \\ -2 \, r_{y}^{e} \, n_{z}^{e} & 2 \, r_{x}^{e} \, n_{z}^{e} & -r_{x}^{e} \, n_{y}^{e} + r_{y}^{e} \, n_{x}^{e} \end{bmatrix}$$

$$(17.7)$$

Dans le cas des machines tournantes, le calcul du couple est effectué en utilisant une surface disposée dans l'entrefer. Il s'agit d'un cylindre d'axe Oz et de rayon R. En utilisant les coordonnées cylindriques dans l'expression précédente, nous obtenons :

$$\mathbf{M}_{c}^{e} = 2R \begin{bmatrix} -\cos\theta^{e}\sin\theta^{e} & \cos^{2}\theta^{e} & 0\\ -\sin^{2}\theta^{e} & \cos\theta^{e}\sin\theta^{e} & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
 (17.8)

où θ^e est l'angle que fait le vecteur \mathbf{r}_e avec l'axe Ox.

En théorie, cette valeur de la force ou du couple ne dépend pas du choix de la surface d'intégration Γ' . Cela n'est pas toujours vérifié en modélisation numérique [Coulomb, Meunier 1984], [Sadowski 1993]. En effet, pour avoir une précision suffisante, cette surface doit être placée de façon à relier les milieux des arêtes des tétraèdres (cf. figure 17.2). Ces éléments appartiennent à une couche entourant l'objet modélisé. Selon la disposition de ces éléments dans cette couche, on peut distinguer deux types d'éléments surfacique : triangles ou quadrilatères. Cela nécessite donc deux algorithmes pour calculer la surface et le barycentre.

17.2 Méthode des travaux virtuels

17.2.1 Principe

Nous considérons le même domaine \mathcal{D}' que celui définit précédemment (cf. figure 17.1). Nous désirons calculer les forces et le couple par la méthode des travaux virtuels. Cette approche est basée sur le principe de la transformation de l'énergie magnétique en énergie mécanique. En effet, on peut montrer que la force totale, suivant une direction "s", est calculée à partir de la variation de l'énergie magnétique "w" du système après un déplacement dans cette même direction. Ce mouvement est à flux constant, c'est-à-dire \mathbf{B} constant [Coulomb 1983], [Ren, Razek 1992].

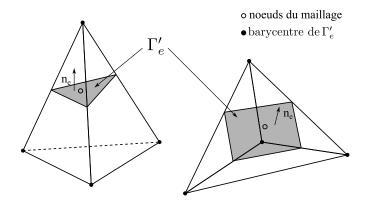


Figure 17.2 – Type d'éléments surfaciques - Intersection entre un maillage en tétraèdres et la surface d'intégration

$$F_s = -\partial_s w|_{\mathbf{B}=\text{cte }} s = x, y, z \quad \text{avec } w = \int_{\mathcal{D}'} \int_0^{\mathbf{b}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \, dv$$
 (17.9)

Une expression similaire peut être établie en utilisant la co-énergie "w'" à courant constant, c'est-à-dire ${\bf H}$ constant.

$$F_s = -\partial_s w'|_{\mathbf{H}=\text{cte }} s = x, y, z \quad \text{avec } w' = \int_{\mathcal{D}'} \int_0^{\mathbf{H}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{H} \, dv$$
 (17.10)

En supposant qu'il n'y a pas de variations de ${\bf H}$ ou ${\bf B}$ sur la frontière Γ durant le déplacement, le calcul de w ou w' est effectué uniquement dans le domaine ${\mathcal D}'$. Vu les considérations sur le champ et l'induction, le calcul de la force est obtenu en utilisant : la dérivée de l'énergie (cf. expression 17.9) pour le potentiel vecteur ${\bf A}$ et la dérivée de la co-énergie (cf. expression 17.10) pour le potentiel scalaire Ω [Coulomb 1983].

Nous pouvons aussi calculer le couple par une dérivation de w ou w' par rapport à l'angle de rotation θ . Nous obtenons donc les relations suivantes :

$$C_z = -\partial_\theta w|_{\mathbf{B}=\text{cte}} \quad C_z = -\partial_\theta w'|_{\mathbf{H}=\text{cte}}$$
 (17.11)

17.2.2 Discrétisation

Le but est d'obtenir la valeur globale de la force ou du couple à partir d'une solution du problème par la méthode des éléments finis. Pour ce faire, il est possible d'utiliser d'utiliser une approche par différences finies qui consisterait à évaluer l'énergie w (cf. expression 17.9) ou la co-énergie w' (cf. expression 17.10) pour deux positions s_0 et s_1 de la région \mathcal{D}' . La valeur de la force est alors donnée par les expressions :

$$F_s = -\frac{w_1 - w_0}{s_1 - s_0} \quad F_s = -\frac{w_1' - w_0'}{s_1 - s_0}$$
(17.12)

Cette approche nécessite donc deux solutions du problème. D'une part, elle introduit des erreurs d'arrondi sur le calcul des forces [Coulomb, Meunier 1984]. Pour ces raisons , on lui préfère une méthode basée sur la dérivation de locale de l'énergie ou de la co-énergie. Dans ce cas, le calcul de la force ou du couple est obtenu par une différentiation directe des fonctionnelles d'énergie w ou w' en utilisant une seule résolution par la méthode des éléments finis. Cette méthode donne un algorithme générale et facile à implanter. Son introduction dans un code de calcul est faite par la dérivée de la matrice jacobienne [Coulomb 1983].

Le calcul est effectué par une intégrale volumique en 3D ou surfacique en 2D. Généralement on choisit une couche d'éléments situés dans l'air et englobant le domaine \mathcal{D}' . Le mouvement de ce dernier implique une déformation des éléments de la couche. Les nœuds de la surface sont alors virtuellement déplacés [Coulomb 1983], [Ren, Razek 1992], [Sadowski 1993]. Dans le cas des machines tournantes, une telle couche est disposée dans l'entrefer.

17.2.2.1 Dérivée locale de l'énergie magnétique

L'utilisation du potentiel vecteur **A**, discrétisé par les éléments d'arête, implique qu'un flux peut être gardé constant par les circulations de **A**. Par conséquent , le calcul des forces est obtenu par la dérivée de l'énergie. pour chaque élément, l'induction magnétique est donnée par :

$$\mathbf{b}^e = \mathbf{rotw}^e \, c_a^e$$

L'énergie magnétique est alors approchée par une somme finie sur les N_e éléments de la couche définie précédemment :

$$w = \sum_{e=1}^{N_e} w^e = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N_e} c_a^{eT} S_a^e c_a^e \quad \text{avec } S_a^e = \int_{\mathcal{D}_e} \frac{1}{\mu_0} \mathbf{rotw}^{eT} \cdot \mathbf{rotw}^e dv$$
 (17.13)

 w^e est l'énergie magnétique pour un élément ayant subi un déplacement virtuel. On note que S_a^e est la matrice de raideur élémentaire calculée dans l'air. On rappelle que les termes de la matrice de raideur dans l'air S_a et du vecteur source F_a s'écrivent :

$$S_{a i,j} = \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{w}^{i} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}^{j} d\mathcal{D} i, j = 1, ..., N_{a}$$

$$(17.14)$$

$$F_{aj} = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{w}^j \cdot \mathbf{J}_0 \, d\mathcal{D} \tag{17.15}$$

Comme les valeurs des circulations sont maintenues constantes pendant le déplacement et que l'énergie magnétique du domaine \mathcal{D}' change, la dérivation s'effectue uniquement sur les termes de la matrice S_a^e . La force s'écrit alors comme suit :

$$F_s = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N_e} c_a^{eT} \, \partial_s S_a^e \, c_a^e \tag{17.16}$$

L'expression de la matrice $\partial_s S_a^e$ est obtenue plus facilement par le passage de l'élément réel \mathcal{D}_e à l'élément de référence $\hat{\mathcal{D}}_e$ (voir annexe L et M):

$$\partial_s S_a^e = \int_{\hat{\mathcal{D}}_e} \frac{1}{\mu_0} \operatorname{\mathbf{rot}} w^{eT} \left[\left(\partial_s \mathbf{J}^T \right) \mathbf{J}'^T - \left(\partial_s \mathbf{J}' \right) \mathbf{J} \right] \operatorname{\mathbf{rot}} w^e \, d\hat{v}$$
 (17.17)

 ${f J}$ est la matrice jacobienne et ${f J}'$ représente la co-matrice (matrice des cofacteurs) transposée de la matrice ${f J}.$

17.2.2.2 Dérivée locale de la co-énergie magnétique

Pour le potentiel scalaire Ω , la force est calculée par la dérivée de la co-énergie. En effet, on peut avoir un courant constant en fixant les valeurs du potentiel. Ce dernier est discrétisé par des éléments nodaux. Dans ce cas, le champ magnétique \mathbb{H} s'écrit $\mathbf{h}^e = -\mathbf{grad}\lambda^e \Omega^e$ pour chaque élément. La co-énergie (cf. expression 17.10) est alors donnée par la relation suivante :

$$w' = \sum_{e=1}^{N_e} w'^e = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N_e} \Omega^{eT} S_{\Omega}^e \Omega^e \quad \text{avec } S_{\Omega}^e = \int_{\mathcal{D}_e} \mu_0 \operatorname{\mathbf{grad}} \lambda^{eT} \cdot \operatorname{\mathbf{grad}} \lambda^e dv$$
 (17.18)

On note que S_{Ω}^{e} est la matrice élémentaire de raideur exprimée dans l'air.

On rappelle que les termes de la matrice de raideur dans l'air S_a et du vecteur source F_a s'écrivent :

$$S_{a i,j} = \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{w}^{i} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}^{j} d\mathcal{D} i, j = 1, ..., N_{a}$$

$$(17.19)$$

$$F_{aj} = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{w}^j \cdot \mathbf{J}_0 \, d\mathcal{D} \tag{17.20}$$

Durant le déplacement, les valeurs du potentiel Ω sont fixées, par contre, la co-énergie du domaine \mathcal{D}' change. De ce fait, la force est calculée à partir de la dérivée de la matrice S^e_{Ω} :

$$F_s = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N_e} \Omega^{eT} \, \partial_s S_{\Omega}^e \, \Omega^e \tag{17.21}$$

En utilisant les mêmes notations que précédemment, nous obtenons (cf. annexe M):

$$\partial_s S_{\Omega}^e = \int_{\hat{\mathcal{D}}_e} \mu_0 \operatorname{\mathbf{grad}} \lambda^{eT} \left[\left(\partial_s \mathbf{J}^T \right) \mathbf{J}^{\prime T} - \left(\partial_s \mathbf{J}^{\prime} \right) \mathbf{J} \right] \operatorname{\mathbf{grad}} \lambda^e d\hat{v}$$
 (17.22)

L'expression matricielle entre crochets :

$$\left[\left(\partial_s \mathbf{J}^T \right) \, \mathbf{J}'^T - \left(\partial_s \mathbf{J}' \right) \, \mathbf{J} \right]$$

est la même pour les deux relations 17.17 et 17.22. Cela représente un avantage considérable. En effet, il suffit d'utiliser un seul algorithme pour développer les calculs pour les deux formulations.

17.2.2.3 Dérivée de la matrice jacobienne

Le calcul de la force ou du couple, par la méthode des travaux virtuels, est ramenée à une dérivation de la matrice jacobienne $\bf J$. Cette dernière permet de passer de l'élément réel, de forme quelconque, à un élément de référence de forme unique (cf. annexe $\bf L$). L'expression de $\bf J$ est donnée dans l'annexe $\bf L$, nous la rappelons ici afin de calculer sa dérivée. Pour un tétraèdre, dont les nœuds sont repérés par les coordonnées cartésiennes $((x_i,y_i,z_i)\ i=1,4)$, nous avons la relation suivante :

$$\mathbf{J} = \mathbf{grad}\hat{\lambda} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}$$
(17.23)

où $\hat{\lambda}$ désigne les fonctions d'approximations nodales définies dans le système de référence.

Ces fonctions sont linéaires, donc leur gradient est constant. Par conséquent, la dérivation de ${\bf J}$ est faite uniquement sur les coordonnées des nœuds de l'élément :

$$\partial_{s} \mathbf{J} = \mathbf{grad} \hat{\lambda} \begin{bmatrix} \partial_{s} x_{1} & \partial_{s} y_{1} & \partial_{s} z_{1} \\ \partial_{s} x_{2} & \partial_{s} y_{2} & \partial_{s} z_{2} \\ \partial_{s} x_{3} & \partial_{s} y_{3} & \partial_{s} z_{3} \\ \partial_{s} x_{4} & \partial_{s} y_{4} & \partial_{s} z_{4} \end{bmatrix}$$

$$(17.24)$$

La table 17.1 résume les valeurs des dérivées pour les différentes composantes de la force suivant x, y et z. Pour le calcul du couple, on pose :

$$s = \theta$$

Le calcul de la force nécessite donc la connaissance des éléments de la couche ainsi que le nœuds virtuellement déplacés (cf. figure 17.3).

S	nœud i déplacé			nœud i fixe		
	$\partial_s x_i$	$\partial_s y_i$	$\partial_s z_i$	$\partial_s x_i$	$\partial_s y_i$	$\partial_s z_i$
X	1	0	0	0	0	0
у	0	1	0	0	0	0
\mathbf{z}	0	0	1	0	0	0
θ	y_i	$-x_i$	0	0	0	0

Tableau 17.1 – les dérivées des coordonnées

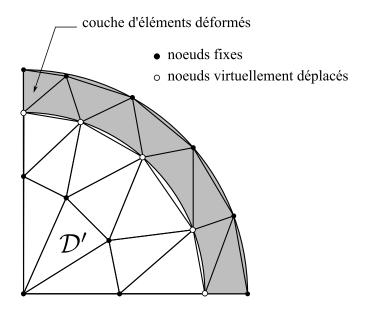


Figure 17.3 – Éléments déformés et nœuds déplacés pour un maillage en triangles.

Chapitre 18

Calcul des flux magnétiques locaux

18.1 Introduction

Il peut être intéressant de calculer un flux plus localement à travers une surface située à l'intérieur du domaine. Pour les formulations utilisant le potentiel vecteur magnétique **A**, le calcul d'une telle grandeur ne pose pas de problème puisqu'il suffit de calculer la circulation de **A** sur un contour d'une surface. Par contre, pour les formulations discrètes en potentiel scalaire magnétique, comme la composante normale de l'induction magnétique n'est pas conservée, on ne peut pas définir la notion de flux magnétique. Néanmoins, plusieurs méthodes existent pour déterminer une image d'une telle grandeur.

18.2 Présentation du problème

Dans le suite, on considère une surface S contractile supportée par les facettes du maillage (cf. figure 18.1).

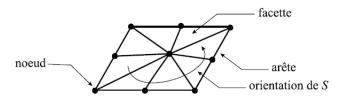


Figure 18.1 – Définition de la surface S.

On note n_a^S le nombre d'arêtes formant la frontière ∂S et n_f^S le nombre de facettes de S. L'orientation de S est fixée arbitrairement, celle-ci oriente implicitement son contour ∂S (cf. figure 18.1).

Pour simplifier la présentation, on se placera dans le cas de la magnétostatique sachant que cette méthode doit pouvoir être étendue au cas de la magnétodynamique.

18.3 Cas de la formulation A

Dans le cas de la formulation \mathbf{A} , le flux magnétique Φ_A traversant la surface S peut directement être obtenu par l'expression de l'induction magnétique \mathbf{B}_A .

$$\Phi_A = \int_S \mathbf{B_A} \cdot \mathbf{n} \, ds \tag{18.1}$$

avec \mathbf{n} le vecteur unitaire normal à S dont le sens est fixé par l'orientation de S.

Comme l'induction \mathbf{B}_A est discrétisée dans l'espace des éléments de facette, sa composante normale est alors conservée à travers toutes les facettes du maillage. En exprimant l'induction \mathbf{B}_A en fonction du potentiel \mathbf{A} ($\mathbf{A} \in \mathbf{W}^1$) dans l'équation 18.1, le flux magnétique traversant S est obtenu par une expression plus simple :

$$\Phi_A = \int_S \mathbf{B_A} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_S \mathbf{rot} \, \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, ds = \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\partial s \tag{18.2}$$

Le sens de parcours de ∂S est déterminé par l'orientation choisie pour S. Pour chaque arête a de n_a^S un nombre d'incidence δ_a est associé, si les orientations de a et de ∂S sont les mêmes alors $\delta_a = 1$ sinon $\delta_a = -1$. Dans ces conditions, l'expression de Φ_A en fonction des circulations de \mathbf{A} le long des arêtes est égale à :

$$\Phi_A = \sum_{a=1}^{n_a^S} A_a \,\delta_a \tag{18.3}$$

Un exemple est donné par la figure 18.2 où le contour de la surface S est composé de 8 arêtes.

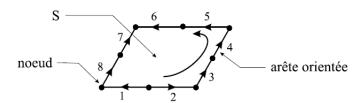


Figure 18.2 – Exemple de calcul d'un flux magnétique local par la formulation A.

Le flux Φ_A traversant S est alors égal à :

$$\Phi_A = -A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - A_5 + A_6 - A_7 - A_8 \tag{18.4}$$

Cette méthode classiquement utilisée est très intéressante en terme de temps de calcul et de simplicité d'implantation. En effet, seul les nœuds appartenant à ∂S sont à déterminer (les arêtes de ∂S en sont facilement déduites) et non la surface S elle-même.

18.4 Cas de la formulation Ω

Dans la suite, la formulation Ω sera supposée résolue sur le maillage primal. On obtient alors un champ magnétique \mathbf{H}_{Ω} qui vérifie le théorème d'Ampère. En revanche, l'induction \mathbf{B}_{Ω} obtenue par l'intermédiaire de la loi de comportement ne vérifie pas la loi de conservation du flux et ne possède pas de composante normale continue sur tout le domaine. Pour obtenir un tel champ, il faudrait avoir recours au maillage dual où l'induction $\hat{\mathbf{B}}_{\Omega}$ est à flux conservatif (cf chapitre I de [Henneron 2004]).

18.4.1 Première approche

Comme la composante normale de \mathbf{B}_{Ω} n'est pas conservée, la valeur de l'intégrale surfacique de la composante normale de l'induction à travers une facette f commune à deux éléments e^+ et e^- n'est pas la même que l'on considère l'expression de \mathbf{B}_{Ω} sur e^+ et e^- (cf. figure 18.3).

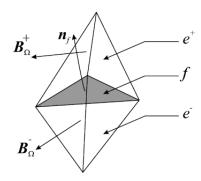


Figure 18.3 – Exemple de facette contenue dans la surface S.

Deux valeurs homogènes à des flux Φ_f^+ et Φ_f^- peuvent être calculées :

$$\Phi_f^+ = \int_f \mathbf{B}_{\Omega}^+ \cdot \mathbf{n_f} \, df \quad \text{et} \quad \Phi_f^- = \int_f \mathbf{B}_{\Omega}^- \cdot \mathbf{n_f} \, df$$
 (18.5)

avec \mathbf{B}_{Ω}^+ et \mathbf{B}_{Ω}^- l'induction magnétique dans deux éléments e^+ et e^- ayant la facette f commune et \mathbf{n}_f le vecteur normal à f dont l'orientation dépend de celle de S. Deux grandeurs Φ_{Cl}^+ et Φ_{Cl}^- homogènes à un flux à travers une surface S sont définies comme la somme des deux grandeurs Φ_f^+ et Φ_f^- :

$$\Phi_{Cl}^{+} = \sum_{f=1}^{n_f^S} \Phi_f^{+} \quad \text{et} \quad \Phi_{Cl}^{-} = \sum_{f=1}^{n_f^S} \Phi_f^{-}$$
(18.6)

18.4.2 Deuxième approche

La seconde approche se base sur la relation donnant le flux à travers une surface appartenant à la frontière du domaine \mathcal{D} :

$$\Phi_D = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{B}_{\Omega} \cdot \mathbf{grad} \alpha \, d\mathcal{D} \tag{18.7}$$

avec α défini au paragraphe 3.2.

Si l'on considère une surface S à l'intérieur de \mathcal{D} mais dont sa frontière ∂S appartient à Γ_B . On peut utiliser une relation similaire à 18.7. On désigne par N_{e^+} et N_{e^-} les deux ensembles d'éléments situés de chaque côté de S et ayant au moins un nœud appartenant à S (cf. figure 18.4). Ces deux ensembles d'éléments forment deux domaines \mathcal{D}^+ et \mathcal{D}^- .

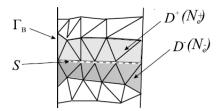


Figure 18.4 – Exemple de domaines issus de la surface S.

On définit ainsi une fonction α^+ (resp. α^-) nulle sur \mathcal{D} \mathcal{D}^+ (resp. \mathcal{D} \mathcal{D}^-) et définie de la manière suivante sur \mathcal{D}^+ (resp. \mathcal{D}^-) :

$$\alpha^+ = \sum_{n \in S} w_n \tag{18.8}$$

où w_n désigne la fonction nodale associée au nœud n.

Dans ces conditions, deux valeurs homogènes à un flux à travers la surface S peuvent être calculées par :

$$\Phi_D^+ = \int_{\mathcal{D}^+} \mathbf{B}_{\Omega} \cdot \mathbf{grad} \alpha^+ d\mathcal{D}^+ \quad \text{et} \quad \Phi_D^- = \int_{\mathcal{D}^-} \mathbf{B}_{\Omega} \cdot \mathbf{grad} \alpha^- d\mathcal{D}^-$$
 (18.9)

On montre que Φ_D^+ et Φ_D^- sont égaux puisqu'ils correspondent aux flux à travers les facettes duales des arêtes situées de chaque côté de S et ayant un seul nœud sur S (cf. figure 18.5).

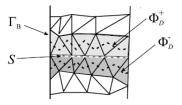


Figure 18.5 – Flux à travers les facettes duales.

Nous rappelons que cette méthode n'est applicable qu'avec des surfaces S supportées par des conditions limites de type $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$. Par la suite, nous en proposerons une extension pour des surfaces qui ne s'appuient pas sur Γ_B .

18.4.3 Troisième approche

On définit à l'aide de la frontière ∂S formée d'arêtes une spire exploratrice. Le champ magnétique produit uniquement par la spire parcourue par un courant de 1 A dans un domaine \mathcal{D} supposé homogène de perméabilité μ_0 est noté \mathbf{K}_{sp} .

Ce champ est calculé par la loi de Biot et Savart en tout point M du domaine (cf. figure 18.5) par :

$$\mathbf{K}_{sp}(M) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial S} \frac{\mathbf{dl} \times \mathbf{\Xi}}{\|\mathbf{r}\|^2}$$
 (18.10)

avec ${\bf u}$ le vecteur unitaire de ${\bf r}$ et ${\bf dl}$ un déplacement élémentaire le long des arêtes de ∂S . Le flux magnétique Φ_{sp} est alors calculé par :

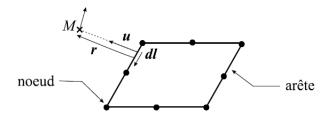


Figure 18.6 – Calcul de \mathbf{K}_{sp} en un point M.

$$\Phi_{sp} = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{B}_{\Omega} \cdot \mathbf{K}_{sp} \, d\mathcal{D}$$
 (18.11)

Le vecteur \mathbf{K}_{sp} ne peut être projeté dans l'un des espaces discrets présenté précédemment. Le calcul numérique de l'expression 18.11 se doit d'être réalisé le plus soigneusement possible pour être précis. La méthode d'intégration de Gauss a été utilisée pour ce calcul, mais les points d'intégration choisis ne doivent pas être placés sur la frontière de la surface (le vecteur \mathbf{K}_{sp} n'y est pas défini) mais à l'intérieur des éléments. La technique numérique utilisée pour la détermination de \mathbf{K}_{sp} en un point de Gauss est détaillée dans l'annexe D.

Chapitre 19

Calcul des pertes fer

Dans le contexte actuel de développement de dispositifs respectant des critères en termes de développement durable et d'efficacité énergétique, les axes de recherche portant sur la nécessité d'économiser l'énergie, l'utilisation efficace des matériaux dans les dispositifs électriques et le développement de nouveaux matériaux ayant des propriétés supérieures sont d'une importance capitale. Les récents progrès dans l'industrie électrotechnique sont dus, en grande partie, à l'amélioration de la technologie de fabrication des matériaux magnétiques. Les machines électriques tournantes et statiques, de toutes tailles, sont généralement construites avec des matériaux magnétiques doux (tôles). Pour un dimensionnement adéquat, il est important d'avoir une bonne connaissance des propriétés de ces tôles magnétiques.

En effet, le matériau magnétique représente le cœur de fonctionnement d'une machine électrique et les propriétés du matériau, comme la loi de comportement magnétique B(H) et les pertes fer, influencent les performances et l'efficacité de la machine.

Dans ce chapitre, nous allons, dans un premier temps, introduire les définitions des différentes grandeurs magnétiques qui vont nous permettre d'expliquer la physique du matériau magnétique. Dans un second temps, les mécanismes à l'origine des pertes fer seront décrits à partir de la théorie de Bertotti. Ensuite, les principales difficultés liées à l'estimation de ces pertes fer dans une machine électrique seront présentées. Dans une dernière partie, nous allons traiter les principaux modèles utilisés pour estimer ces pertes et présenter l'approche que nous avons choisie pour les présents travaux.

19.1 Les matériaux magnétiques

19.1.1 Grandeurs magnétiques

Un échantillon de matière est fondamentalement décrit, du point de vue des propriétés magnétiques, comme un ensemble de moments magnétiques, résultant du mouvement des électrons. Classiquement, les électrons en orbite autour du noyau atomique sont dotés d'un moment magnétique appelé aussi moment orbital :

$${\bf m} = -(e/2 \, m_e) \, {\bf L}$$

où:

- -e désigne la charge;
- m_e correspond à la masse de l'électron;
- L est le moment angulaire.

En plus de ce moment magnétique orbital, les électrons possèdent un moment magnétique intrinsèque appelé moment magnétique de spin. On définit ainsi le moment magnétique d'un atome comme la somme vectorielle de ces deux moments.

À l'échelle macroscopique, un élément de volume de matière magnétique est un ensemble de moments magnétiques et on peut définir l'aimantation M [A/m] du matériau telle que :

$$\mathbf{M} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial v} \tag{19.1}$$

où:

- $-\mathcal{M}$ est la somme des moments magnétiques;
- ∂v est l'élément de volume considéré.

La relation générale qui lie l'induction magnétique ${\bf B}$ [T], le champ magnétique ${\bf H}$ [A/m] et l'aimantation ${\bf M}$ est écrite de cette manière :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \ (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \tag{19.2}$$

où:

— $\mu_0 = 4 \pi \, 10^{-7} \, [H/m]$ est la perméabilité magnétique du vide.

Dans le vide, l'aimantation \mathbf{M} étant nulle, la relation $\mathbf{B} = \mu_0 \, \mathbf{H}$ permet de considérer l'induction et le champ magnétique comme des quantités équivalentes, car simplement liées par la constante de proportionnalité μ_0 . En présence de matière magnétique, la contribution $\mu_0 \, \mathbf{M}$ reflète la réponse du matériau à une sollicitation extérieure. Cette contribution est appelée polarisation magnétique \mathbf{J} , quantité ayant la même unité que \mathbf{B} [T] et les mêmes propriétés que l'aimantation \mathbf{M} . L'équation 19.2 s'écrit alors classiquement sous la forme suivante :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{J} \tag{19.3}$$

La loi de comportement magnétique peut également s'exprimer comme :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \,\mu_r \mathbf{H} \quad \text{et} \quad \mathbf{M} = \chi \,\mathbf{H} \tag{19.4}$$

où:

- μ_r est la perméabilité relative;
- χ est susceptibilité magnétique.

Ces paramètres sont liés par l'équation suivante :

$$\mu_r = 1 + \chi \tag{19.5}$$

Sur la base de cette représentation générale du comportement magnétique, il est possible de décrire le comportement des trois grandes catégories de matériaux magnétiques :

- les matériaux paramagnétiques;
- les matériaux diamagnétiques;
- les matériaux ferromagnétiques.

Dans la suite, nous allons exposer d'une manière succincte les propriétés magnétiques de chaque catégorie de matériaux.

19.1.2 Classification des matériaux magnétiques

19.1.2.1 Le diamagnétisme

Le diamagnétisme se traduit par l'apparition au sein de la matière d'un champ magnétique opposé au champ appliqué. Son origine est la modification du mouvement orbital des électrons autour du noyau atomique suite à l'application d'un champ magnétique extérieur. Par conséquent, l'aimantation diamagnétique est présente dans toutes les matières, mais sa part dans l'aimantation totale reste très faible par rapport à d'autres types d'aimantation.

Parmi les matériaux diamagnétiques (qui présentent seulement une aimantation diamagnétique), on peut citer les éléments Cu, Au, Ag, Zn, Pb, etc. Ces matériaux ont alors une susceptibilité magnétique négative, indépendante de la température, de l'ordre de 10^{-5} . Par conséquent, la loi de comportement de ce type de matériau peut être assimilée à celle du vide dans le cadre de l'étude des machines électriques.

19.1.2.2 Le paramagnétisme

Du point de vue microscopique, le paramagnétisme est lié à l'existence d'un moment magnétique permanent qui peut être porté par des atomes ou des molécules. En l'absence d'un champ magnétique extérieur, les moments magnétiques sont orientés de manière aléatoire en raison de l'agitation thermique, le matériau ne présente donc pas d'aimantation spontanée. Les matériaux paramagnétiques (par exemple Al, Cr, Mn, Na) présentent toutefois une susceptibilité magnétique faible, mais positive, de l'ordre de 10^{-3} à 10^{-5} .

La loi de comportement de ces matériaux peut alors être considérée comme linéaire et proche de celle du vide pour les domaines d'application en électrotechnique.

19.1.2.3 Le ferromagnétisme

Dans le cas du ferromagnétisme, à l'échelle microscopique, les moments magnétiques de spin présentent un fort couplage. Ainsi, à l'échelle d'un domaine de Weiss (que l'on définira plus loin), il existe une aimantation même en l'absence de champ extérieur, l'aimantation étant alors qualifiée de spontanée. Celle-ci est due au fait que les moments atomiques ont tendance à s'aligner spontanément et parallèlement les uns aux autres, réalisant une mise en ordre que l'on peut comparer à la mise en ordre géométrique caractéristique de l'état solide.

Il faut rappeler que la théorie du paramagnétisme considère que les atomes sont indépendants les uns des autres, ce qui n'est pas le cas pour le ferromagnétisme. En effet, il existe une énergie d'échange entre les moments magnétiques portés par les atomes qui ont tendance, par effet collectif, à s'aligner suivant la même direction. L'énergie d'échange peut être écrite, en tenant compte des moments magnétiques \mathbf{S}_i et \mathbf{S}_j de deux atomes voisins, sous la forme suivante :

$$W_{ij} = -2J_{ij}\,\mathbf{S}_i\,\mathbf{S}_j\tag{19.6}$$

Dans cette expression, proposée par Heisenberg, J_{ij} est l'intégrale d'échange. La valeur de ce facteur de couplage favorise l'apparition d'un ordre ferromagnétique si $J_{ij} > 0$ ou d'un ordre antiferromagnétique si $J_{ij} < 0$. Dans le cas d'un matériau ferromagnétique, l'aimantation tend à s'orienter le long des directions privilégiées (direction de facile aimantation) déterminées par la structure cristalline ou par la forme de l'échantillon. Pour modifier la direction d'un moment magnétique, on peut soit appliquer un champ magnétique, soit apporter de l'énergie en augmentant la température. Il faut noter que l'augmentation de la température au-dessus d'une température seuil, appelée température de Curie, conduit à un effondrement réversible de l'aimantation spontanée qui rend le système paramagnétique.

Les matériaux ferromagnétiques (par exemple Fe, Co, Ni et leurs alliages) présentent une susceptibilité importante de l'ordre de 10³ et sont les principaux matériaux utilisés dans les dispositifs

de conversion d'énergie en électrotechnique. On peut encore subdiviser les matériaux ferromagnétiques en deux groupes : les matériaux doux et les matériaux durs (aimants permanents). Les matériaux magnétiques doux peuvent être aimantés facilement avec des champs magnétiques faibles ; ils sont utilisés dans les machines électriques pour concentrer et canaliser le flux magnétique. À des fréquences industrielles, on utilise généralement des tôles FeSi d'épaisseur comprise entre 0,35 et 0,65 mm et pour des fréquences au-delà de 10 kHz, on emploie les matériaux amorphes qui ont une induction à saturation, une épaisseur et des pertes moins importantes que celles des tôles conventionnelles. Les matériaux magnétiques durs (aimants permanents) sont utilisés comme source de champ magnétique dans les machines électriques.

Dans ce document, nous nous intéressons uniquement aux matériaux ferromagnétiques doux.

19.1.3 Configuration en domaines magnétiques

La première théorie moderne du ferromagnétisme, qui reste valable jusqu'à aujourd'hui, a été proposée par Pierre Weiss en 1906-1907 [Weiss 1907], [Brissoneau 1997] et les premiers travaux expérimentaux ont été menés dans les années 1930. En effet, à l'échelle macroscopique, l'aimantation spontanée, observée à l'échelle microscopique, disparaît. La théorie de P. Weiss explique l'existence d'un état désaimanté et stipule qu'un matériau ferromagnétique est subdivisé en plusieurs domaines appelés domaines de Weiss à l'intérieur desquels l'aimantation est uniforme et alignée selon une même direction pour chaque domaine mais différente d'un domaine à l'autre. Ces domaines sont séparés par des parois (parois de Bloch) dont l'épaisseur est beaucoup plus petite que la taille du domaine, de quelques centaines à quelques milliers d'Angström. Dans ces parois, l'orientation de l'aimantation varie rapidement d'une direction dans un domaine vers une autre dans le domaine voisin.

19.1.3.1 Domaines de Weiss

Dans le paragraphe 19.1.2.3, on a introduit la notion d'énergie d'échange entre les moments magnétiques des atomes voisins qui, malgré l'agitation thermique, permet aux moments magnétiques de s'aligner. Cela implique que le moment global du système serait le moment de saturation. Toutefois, il existe encore deux types d'énergie qui viennent s'opposer à l'énergie d'échange : l'énergie magnétostatique et l'énergie d'anisotropie magnétocristalline. C'est l'apparition des domaines de Weiss dans le corps ferromagnétique qui permet de minimiser efficacement la somme des trois types d'énergie magnétique.

19.1.3.1.1 L'énergie d'anisotropie

Dans une structure cristalline, il existe des directions de facile aimantation selon lesquelles l'énergie nécessaire pour aimanter le matériau est moins importante que pour les autres directions. Par exemple, pour un échantillon monocristallin, si le champ d'excitation est appliqué suivant l'axe de facile aimantation, la polarisation ${\bf J}$ atteint presque instantanément la valeur de saturation.

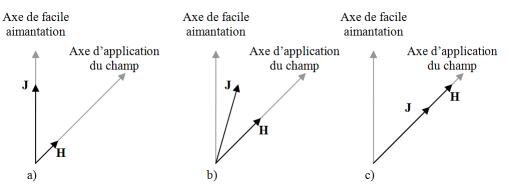


Figure 19.1 – Comportement de la polarisation J lors d'application d'un champ H.

En revanche, si on applique un champ d'excitation sur un axe différent de celui de facile aimantation, la polarisation **J** ne subit pas le même comportement que dans le cas précédent. Comme illustré sur la figure 19.1a, si on applique un champ suivant une direction hors de l'axe de facile aimantation, les matériaux se polarisent dans un premier temps suivant l'axe de facile aimantation le plus proche. Dans ce cas, suivant l'axe d'application du champ magnétique, la contribution d'aimantation correspond à la projection de la polarisation sur ce même axe. Si l'amplitude du champ magnétique continue de croître, on observe une rotation de la polarisation **J** et une augmentation lente de la projection sur l'axe d'application du champ qui se rapproche du niveau de saturation (19.1b). Le champ nécessaire pour faire quitter la direction de la polarisation s'appelle "champ d'anisotropie". Ensuite, si on continue à accroître le champ magnétique, la polarisation s'alignera avec le champ magnétique et le matériau sera saturé suivant la même direction que celle du champ d'excitation (19.1c). Par conséquent, l'énergie volumique nécessaire pour atteindre la saturation suivant une direction autre que la direction de facile aimantation sera plus élevée.

19.1.3.1.2 L'énergie magnétostatique

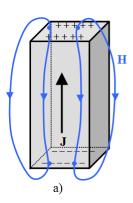
Cette énergie résulte des interactions magnétiques entre les moments magnétiques, puisque chaque moment magnétique est soumis à un champ local créé par l'ensemble des autres moments magnétiques. P. Brissonneau [Brissoneau 1997] a proposé une expression pour l'énergie magnéto-statique en représentant la matière aimantée comme un ensemble de moments magnétiques dans le vide.

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}' \, dv \tag{19.7}$$

où:

- V est le volume du système;
- \mathbf{H}' est le champ local.

En l'absence de champ extérieur, \mathbf{H}' est dû à l'existence du champ démagnétisant créé par les moments de la structure. Ceux-ci sont la conséquence de l'apparition des masses magnétiques fictives au sein du matériau à cause de la divergence locale de l'aimantation.



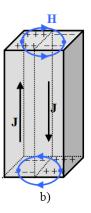


Figure 19.2 – Système avec aimantation uniforme a); Structure fractionnée en deux domaines avec aimantations antiparallèles b).

Sur la figure 19.2a, la présence des pôles magnétiques fictifs donne naissance à un champ magnétique qui, d'après l'équation 19.7, va introduire une énergie magnétostatique significative. En revanche, comme les moments magnétiques sont alignés selon une seule direction, la direction de facile aimantation, l'énergie d'échange et l'énergie d'anisotropie sont minimisées. Dans la deuxième configuration (Figure 19.2b), la structure est divisée en deux domaines avec des moments magnétiques antiparallèles. Le champ magnétique se reboucle alors dans les parties extrêmes

des domaines, limitant ainsi le champ magnétique par rapport à la première configuration. Par conséquent, cette configuration minimise l'énergie magnétostatique mais l'énergie d'échange augmente parce qu'il existe des moments antiparallèles à l'interface entre les domaines. Par ailleurs, la contribution de l'énergie d'anisotropie favorise l'orientation des moments magnétiques suivant une direction privilégiée du cristal pour minimiser l'énergie globale du système.

Ainsi, de façon globale, l'énergie totale du matériau (somme des trois contributions pré-citées) est minimisée par la division du matériau en domaines de Weiss. La taille de ces domaines varie en fonction du matériau et de la qualité métallurgique. L'ordre de grandeur des domaines peut aller de quelques dizaines de nanomètres à quelques centaines de microns.

19.1.3.2 Parois de Bloch

Comme mentionné au précédent paragraphe, un matériau ferromagnétique est subdivisé en plusieurs domaines. Cette structure fait apparaître des zones de transition (parois de Bloch) entre les domaines voisins où l'orientation des moments magnétiques bascule d'une orientation d'un domaine vers une autre dans le domaine voisin.

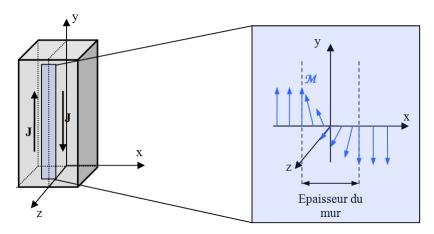


Figure 19.3 – Rotation des moments magnétiques entre deux domaines à 180 °.

Comme illustré sur la figure ci-dessus, le changement d'orientation des moments magnétiques n'est pas brutal et se fait de manière progressive dans l'épaisseur de la paroi. Ainsi, l'énergie d'échange nécessaire pour une transition progressive est moindre par rapport à une transition brutale [Brissoneau 1997]. L'énergie d'échange évolue donc d'une manière inversement proportionnelle à la taille de la paroi. Toutefois, si on raisonne en termes d'énergie d'anisotropie, une grande épaisseur de la paroi implique une croissance d'énergie d'anisotropie à cause du fait qu'il existe plusieurs moments magnétiques alignés sur des directions défavorables. En fait, la largeur optimale de cette paroi est obtenue pour la configuration de minimum d'énergie globale.

19.1.4 Processus d'aimantation

19.1.4.1 Courbe de première aimantation

Dans le cas où un matériau ferromagnétique est désaimanté, les aimantations associées aux domaines de Weiss présentent des directions aléatoires, résultant alors en une aimantation totale nulle. A noter que, en pratique, cet état désaimanté peut être obtenu par relaxation naturelle du matériau ou par application d'un champ alternatif d'amplitude importante initialement (pour saturer le matériau) puis de plus en plus faible jusqu'à l'annulation de l'excitation. Si un champ magnétique croissant est ensuite appliqué au matériau, les moments magnétiques auront tendance à s'aligner selon la direction du champ appliqué. Cela signifie que les parois de Bloch vont se déplacer au sein du matériau.

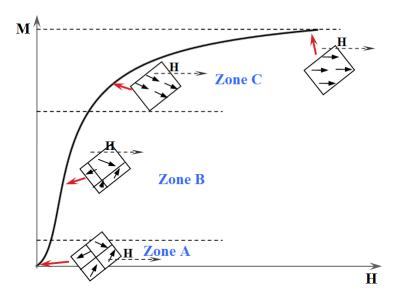


Figure 19.4 – La courbe de première aimantation.

Toutefois, le déplacement des parois de Bloch est gêné par les imperfections présentes au sein du matériau. Ces imperfections sont dues notamment à des impuretés non magnétiques et ferromagnétiques ainsi qu'aux contraintes de dislocation, de joints de grains et de traitements métallurgiques. Ces défauts ont pour conséquences directes, comme on le verra ultérieurement, une réduction de la perméabilité et une augmentation des pertes magnétiques. Ainsi, en fonction de l'intensité du champ magnétique appliqué, le mécanisme d'aimantation peut être décrit, en première approche, comme la succession de trois mécanismes principaux (Figure 19.4) :

- Région A: il s'agit de la zone des champs faibles où on peut assimiler le déplacement des parois à une déformation élastique. De façon imagée, celles-ci n'étant pas rigides, elles peuvent se déformer sur les sites d'ancrage. Ainsi, si l'augmentation du champ extérieur n'est pas suffisante pour décrocher la paroi, celle-ci se déformera sans entraîner de variation brutale de l'aimantation. Ce processus est réversible : si le champ extérieur s'annule, le système retourne à l'état initial.
- Région B : dans cette région, l'intensité du champ magnétique extérieur atteint un niveau permettant aux parois de vaincre les sites d'ancrages. Ainsi, les domaines dont l'aimantation initiale se trouve dans la même direction ou dans une direction proche de celle du champ magnétique extérieur vont croître en volume au détriment des autres domaines.
- Région C : Pour arriver à cette région, l'intensité du champ magnétique doit être très élevée. L'aimantation commence alors à saturer et les parois de Bloch disparaissent. On a pratiquement une structure avec un seul domaine magnétique où les moments magnétiques commencent à s'aligner sur la même direction du champ magnétique appliqué. Ce processus de rotation des moments magnétiques est réversible.

19.2 Les pertes magnétiques

Lorsqu'un matériau ferromagnétique est soumis à un champ variable dans le temps, il est le siège d'une dissipation d'énergie, plus communément appelée pertes magnétiques ou pertes fer. D'après l'approche proposée par Bertotti, [Bertotti 1988], ces pertes peuvent être décomposées en trois contributions :

- Les pertes par hystérésis;
- Les pertes par courants induits (ou pertes classiques);

Les pertes excédentaires.

Remarque 19.2.1 En réalité, ces trois composantes sont dues aux courants induits qui se développent dans le matériau, mais à des échelles différentes (microscopique et macroscopique).

Dans la suite, on présente, de façon succincte, ces trois contributions aux pertes totales. On se place dans le cas d'une tôle ferromagnétique dont la longueur et la largeur sont beaucoup plus grandes que son épaisseur, et dans des conditions de dynamique d'excitation (fréquence) telles que l'épaisseur de peau reste grande devant l'épaisseur de la tôle. Le champ magnétique pourra alors être considéré, en première approche, homogène dans l'épaisseur de la tôle. Par ailleurs, on travaillera dorénavant avec la grandeur usuelle induction magnétique ${\bf B}$ liée à l'aimantation ${\bf M}$ par l'équation 19.2.

19.2.1 Les pertes par hystérésis

Les pertes par hystérésis sont associées au mouvement des parois de Bloch (voir paragraphe 19.1.3), processus majoritairement irréversible et qui introduit un retard de l'induction magnétique **B** par rapport au champ d'excitation **H**. Ce retard s'observe à l'échelle macroscopique sous la forme d'un cycle d'hystérésis propre au matériau. De plus, à partir de considérations thermodynamiques [Bertotti 1998], on peut montrer que l'aire décrite par ce cycle correspond à l'énergie volumique dissipée au cours d'une période. Ainsi, comme indiqué précédemment, les déplacements des parois ne se font pas de manière continue, mais par sauts brusques d'un site d'ancrage à l'autre (sauts de Barkhausen, voir figure 19.5)

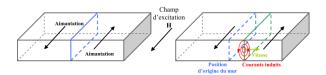


Figure 19.5 – Courants induits microscopiques lors du déplacement d'une paroi à $180\,^{\circ}$.

Ces sauts sont associés à des variations de flux locales, donnant ainsi naissance à des courants induits microscopiques dans la région des parois de Bloch.

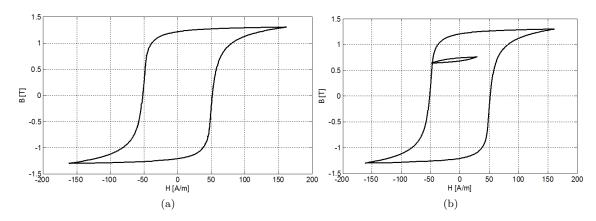


Figure 19.6 – a) Cycle majeur d'hystérésis centré b) Cycle majeur d'hystérésis centré avec cycle mineur

Par ailleurs, en fonction de la forme d'onde de l'induction magnétique, les cycles d'hystérésis peuvent présenter des cycles mineurs non centrés (Figure 19.6). Ces cycles mineurs induisent des

pertes supplémentaires déterminées également par leur surface. De façon générale, on écrit l'énergie fournie au matériau pour parcourir un cycle complet par :

$$W = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \quad \left[J/m^3 \right] \tag{19.8}$$

Cette énergie est convertie en chaleur lors du processus d'aimantation et représente les pertes volumiques par hystérésis dans le cas statique (fréquence ou dynamique faibles).

$$P_h = f \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \quad \left[\mathbf{W/m}^3 \right] \tag{19.9}$$

19.2.2 Les pertes par courants induits

En régime dynamique, en plus des pertes en régime statique, les pertes dues aux courants induits macroscopiques, liés à la conductivité σ du matériau, deviennent non négligeables. Sur la figure 19.7, on peut observer les courants induits qui se développent dans l'épaisseur de la tôle. Sur cette figure, le champ et l'induction magnétiques sont orientés selon l'axe (Oz); le champ électrique $\bf E$ et la densité de courant induit $\bf J$ sont dirigés selon l'axe (Ox). On suppose que la dynamique du champ d'excitation $\bf H$ est suffisamment faible pour avoir un champ homogène dans la tôle et négliger ainsi l'effet de peau.

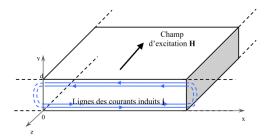


Figure 19.7 – Développement de courants induits dans l'épaisseur d'une tôle.

Dans les conditions d'une tôle de dimensions, dans le plan, infinies par rapport à son épaisseur, l'expression des pertes volumiques par courants induits est donnée par [Bertotti 1998] :

$$p_{ci} = \frac{1}{d} \int_0^d \frac{j^2(y,t)}{\sigma} \, dy = \frac{\sigma \, d^2}{12} \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 \tag{19.10}$$

La valeur moyenne, sur une période du champ d'excitation, s'exprime alors sous la forme suivante :

$$P_{ci} = \frac{\sigma d^2}{12} \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 dt \quad \left[\text{W/m}^3\right]$$
 (19.11)

où:

- T est la période temporelle de l'induction magnétique \mathbf{B} ;
- d est l'épaisseur de la tôle.

Dans le cas sinusoïdal, l'expression ci-dessus peut être écrite de cette manière :

$$P_{ci} = 2\pi^2 \left(\frac{\sigma d^2}{12}\right) f^2 B_m^2 \quad \left[W/m^3\right]$$
 (19.12)

On observe que les pertes par courants induits sont proportionnelles au carré de l'épaisseur de la tôle d et au carré de la fréquence et du champ d'induction \mathbf{B} . Ces pertes évoluent aussi linéairement avec la conductivité du matériau.

Du point de vue cycle d'aimantation, en régime dynamique, les courants induits produisent un gonflement du cycle B(H) comme illustré sur la figure 19.8. On parle dans ce cas de cycle de pertes, notamment parce que le cycle inclue les pertes statiques et les pertes par courants induits macroscopiques.

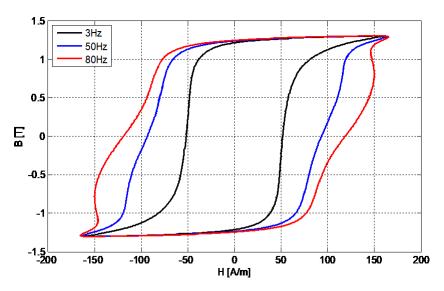


Figure 19.8 – Gonflement du cycle de magnétisation B(H) en régime dynamique.

Dans le cas des machines électriques, ces pertes peuvent être non négligeables, et ce pour plusieurs raisons.

- Les machines étant aujourd'hui largement alimentées avec des convertisseurs statiques, ces derniers introduisent des harmoniques temporelles de courants qui se traduisent directement par des harmoniques de champ magnétique.
- La disposition des bobinages introduit quant à elle, des harmoniques d'espace. La force magnétomotrice d'entrefer n'est donc pas sinusoïdale d'où des harmoniques d'espace du champ magnétique.
- Les encoches statoriques et/ou rotoriques introduisent une variation de la réluctance d'entrefer qui induit également des variations de champ magnétique.
- Enfin, il existe des pertes supplémentaires d'extrémité introduites par les têtes des bobines statoriques, et parfois rotoriques, qui créent des pertes par courants induits supplémentaires au niveau des matériaux magnétiques situés aux extrémités de la machine électrique.

19.2.3 Les pertes excédentaires

À l'origine de ces pertes on retrouve les mouvements des parois de Bloch en régime dynamique. Ces mouvements ne sont pas indépendants et interagissent, conduisant ainsi à l'apparition de courants induits localisés au voisinage des parois. Ce phénomène peut être considéré homogène sur l'ensemble du matériau et dépend fortement de la fréquence du champ d'excitation [Bertotti 1998].

En 1990, Fiorillo et Novikov [Fiorillo, Novikov 1990], sur la base de la théorie développée par Bertotti, ont montré que la valeur moyenne des pertes excédentaires, dans le cas de matériau feuilleté et sur une période électrique, peut être exprimée de la manière suivante :

$$P_{exc} = \sqrt{\sigma G V_0 S} \frac{1}{T} \int_0^T |\frac{dB}{dt}|^{1.5} dt \quad \left[W/m^3 \right]$$
 (19.13)

où:

- G est le coefficient des frottements entre les domaines magnétiques;
- V_0 est un paramètre qui caractérise la distribution statistique du champ coercitif local;
- S est la surface transverse du matériau feuilleté.

Si l'induction magnétique est sinusoïdale, l'expression des pertes excédentaires devient :

$$P_{exc} = 8,764 \sqrt{\sigma G V_0 S} f^{1,5} B_m^{1,5} \quad \left[\text{W/m}^3 \right]$$
 (19.14)

Ces pertes sont influencées par la conductivité du matériau, l'intensité et la fréquence d'excitation ou encore par le niveau des impuretés présentes dans la matière.

19.2.4 Pertes en champ rotationnel

En électrotechnique, le champ magnétique n'est pas toujours unidirectionnel et orienté suivant l'axe de facile aimantation ou transverse. Ainsi, dans la culasse des machines électriques, ou encore dans les joints en T des circuits magnétiques de transformateurs triphasés, la combinaison des champs associés aux différentes phases conduit à l'apparition d'une induction tournante localement. De façon générale, le module de l'induction décrit une forme plus ou moins ellipsoïdale, voire circulaire. Ainsi, si on considère un régime d'induction circulaire d'amplitude B et de vitesse angulaire constante ω , on peut décomposer l'induction selon deux axes dans le plan des tôles x et y sous la forme :

$$\begin{cases}
B_x(t) = B \cos \omega t \\
B_y(t) = B \sin \omega t
\end{cases}$$
(19.15)

Les pertes rotationnelles sur un cycle peuvent alors être exprimées par la relation suivante $[Moses\ 1992]$:

$$P_{rot} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d\theta}{dt} |\mathbf{H}| \cdot |\mathbf{B}| \sin \alpha \, dt$$
 (19.16)

où:

- α est l'angle entre **H** et **B**;
- θ est l'angle entre **B** et une direction donnée.

En pratique, on constate que les pertes fer en champ tournant et en champ unidirectionnel évoluent différemment. La différence s'explique par le comportement complexe lors du mécanisme d'aimantation mis en jeu. Dans le cas d'un champ unidirectionnel, l'induction subit une variation continue, au cours de laquelle les parois de Bloch et les domaines magnétiques sont modifiés en continu. En revanche, dans le cas d'un champ circulaire, l'amplitude de l'induction reste constante et seules les projections du champ varient en amplitude.

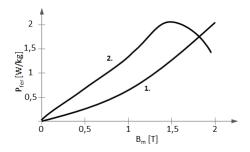


Figure 19.9 – Pertes magnétiques 1) en champ unidirectionnel et 2) en champ tournant.

Pour des champs faibles, les pertes en champ tournant, pour les tôles de type FeSi à grains non orientés (N.O.), peuvent avoir des valeurs doubles de celles en champ unidirectionnel [Moses 1992],

[Enokizono et al 1990]. En champ tournant, ces pertes peuvent être approximées par la somme des pertes en champ unidirectionnel suivant la direction de laminage et suivant la direction transverse. A l'inverse, pour des champs de très fortes amplitudes, les pertes en champ tournant décroissent rapidement en fonction de l'amplitude de B alors que les pertes en champ unidirectionnel continuent de croître en fonction de B (voir figure 19.9). Ce phénomène s'observe généralement pour des valeurs d'induction proches de la saturation.

19.3 Description de la procédure de calcul des pertes fer

Le calcul des pertes fer et la modélisation des matériaux doux étant fortement interdépendants, le calcul des pertes peut être envisagé de deux façons : soit en modélisant la loi de comportement magnétique B(H) par un cycle d'hystérésis, dans ce cas les pertes sont calculées directement dans le code, soit en négligeant l'effet d'hystérésis sur la répartition du flux dans le dispositif et en calculant les pertes a posteriori à partir de formules théoriques ou expérimentales. Dans code_Carmel, le choix s'est porté sur la seconde méthode de calcul des pertes.

La procédure adoptée pour estimer les pertes fer en post-traitement est décrite, de manière simplifiée, sur la figure 19.10 et détaillée dans les sections suivantes. Le code de calcul code_Carmel dispose de deux versions. Une première version est dédiée aux régimes permanents. Les calculs y sont effectués en complexe, harmonique par harmonique. Une seconde version, dite temporelle, où les calculs sont réalisés en pas à pas dans le temps. Dans cette dernière, les grandeurs physiques peuvent varier de façon libre dans le temps.

La procédure de calcul des pertes a été implémentée dans les deux versions. La démarche utilisée dans la version temporelle du code est détaillée ci-dessous.

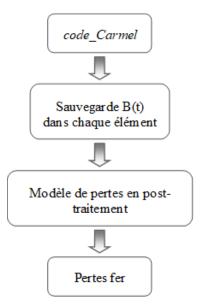


Figure 19.10 – Diagramme simplifié de la procédure de calcul des pertes fer.

Dans un premier temps, la résolution du problème électromagnétique est effectuée, avec code_Carmel, en utilisant l'une des deux formulations. Pour un problème magnétostatique, le calcul peut être effectué avec la formulation en potentiel vecteur ${\bf A}$ ou avec la formulation en potentiel scalaire ${\bf \Omega}$. Dans le cas d'un problème magnétodynamique, l'une des deux formulations mixtes ${\bf A}-\varphi$ ou $T-{\bf \Omega}$ est utilisée.

Dans un second temps, au moyen d'une procédure que nous avons implantée en post-traitement, nous sauvegardons, sur une période, la forme d'onde de l'induction $\mathbf{B}(t)$ dans chaque élément des

milieux sujets aux pertes fer. L'induction magnétique, bien que majoritairement pulsante dans les dispositifs électrotechniques, peut présenter localement un comportement de type champ tournant, conséquence de la combinaison locale des flux issus de phases différentes. De façon plus générale, ce comportement peut être décrit comme ellipsoïdal et induit des pertes supplémentaires qui doivent être prises en compte. Par conséquent, lors du calcul des pertes fer, il est donc nécessaire de considérer les deux composantes spatiales de l'induction dans le plan de la tôle [Bastos, Sadowski 2003]. Ainsi les formes d'ondes de l'induction sont stockées dans deux fichiers qui correspondent à la décomposition du champ **B** selon les deux axes spatiaux (dans le plan des tôles).

Enfin, une dernière procédure a été codée, afin d'exploiter les deux fichiers créés à la fin du calcul électromagnétique. Tout d'abord, la procédure détermine, pour chaque élément, la direction suivant laquelle le module de l'induction est maximal (appelé « Grand axe ») et lui associe localement un nouveau repère comme illustré dans la figure 19.11. Ainsi, à chaque pas de temps, le vecteur ${\bf B}$ est décomposé afin d'extraire les formes d'ondes temporelles selon le grand axe et le petit axe.

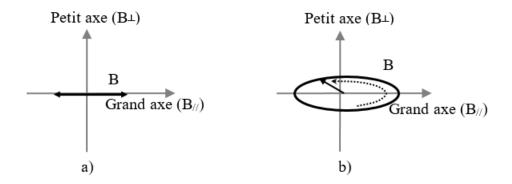


Figure 19.11 – Loci d'induction a) alternative b) rotationnelle.

Ensuite, il est possible de choisir parmi plusieurs subroutines de calculs des pertes fer, implémentées a posteriori, et qui fournissent la densité des pertes fer en $[W/m^3]$ pour chaque élément et suivant les deux axes. Enfin, la densité des pertes de chaque élément est multipliée par le volume (V_i) de l'élément considéré puis sommée aux pertes de tous les autres éléments du système pour aboutir aux pertes fer totales. Les différentes subroutines implémentées sont introduites ci-dessous.

La première subroutine calcule les pertes fer, exprimées en W, en fonction de la valeur crête de l'induction B_m (modèle M1):

$$P_{tot} = \sum_{i=1}^{n} \left[k_h f \left(B_{\perp,m}^{\alpha} + B_{//,m}^{\alpha} \right) + k_{ci} f^2 \left(B_{\perp,m}^2 + B_{//,m}^2 \right) + k_{exc} f^{1,5} \left(B_{\perp,m}^2 + B_{//,m}^2 \right)^{\frac{3}{4}} \right] V_i \quad (19.17)$$

Avec :

- k_h , k_{ci} et k_{exc} les coefficients des pertes fer;
- f la fréquence;
- n le nombre total des éléments.

La seconde subroutine calcule les pertes fer a partir de l'équation ci-dessous (modèle M2);

$$P_{tot} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ k_h f \left[\left(\frac{\Delta B_{\perp}}{2} \right)^{\alpha} + \left(\frac{\Delta B_{//}}{2} \right)^{\alpha} \right] + \frac{k_{ci}}{2 \pi^2} \frac{1}{T} \int_0^T \left[\left(\frac{dB_{\perp}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dB_{//}}{dt} \right)^2 \right] dt + \frac{k_{exc}}{8,76} \frac{1}{T} \int_0^T \left[\left(\frac{dB_{\perp}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dB_{//}}{dt} \right)^2 \right]^{\frac{3}{4}} dt \right\} V_i \quad (19.18)$$

La troisième subroutine calcule le terme quasi-statique en fonction de la valeur crête de l'induction de chaque harmonique k obtenue par la décomposition en série de Fourier et les composantes dynamiques en fonction de la dérivée temporelle de l'induction (modèle M3).

$$P_{tot} = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{k} k_h f_j \left(B_{\perp,m,j}^{\alpha} + B_{//,m,j}^{\alpha} \right) \right] V_i$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{k_{ci}}{2\pi^2} \frac{1}{T} \int_0^T \left[\left(\frac{dB_{\perp}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dB_{//}}{dt} \right)^2 \right] dt$$

$$\frac{k_{exc}}{8,76} \frac{1}{T} \int_0^T \left[\left(\frac{dB_{\perp}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dB_{//}}{dt} \right)^2 \right]^{\frac{3}{4}} dt \right\} V_i \quad (19.19)$$

Enfin, les deux dernières subroutines calculent la composante statique des pertes par un modèle d'hystérésis (Jiles-Atherton ou Preisach) et les composantes dynamiques en fonction de la dérivée temporelle de l'induction (modèle M4 et M5).

$$P_{tot} = \frac{\text{Modèle d'hystéréris}}{\text{statique}} + \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{k_{ci}}{2\pi^{2}} \frac{1}{T} \int_{0}^{T} \left[\left(\frac{dB_{\perp}}{dt} \right)^{2} + \left(\frac{dB_{//}}{dt} \right)^{2} \right] dt \right.$$

$$\left. \frac{k_{exc}}{8,76} \frac{1}{T} \int_{0}^{T} \left[\left(\frac{dB_{\perp}}{dt} \right)^{2} + \left(\frac{dB_{//}}{dt} \right)^{2} \right]^{\frac{3}{4}} dt \right\} V_{i} \quad (19.20)$$

Pour toutes les approches implantées, nous considérons que les contributions données par les deux composantes spatiales sont indépendantes les unes des autres et les pertes sont données par la somme des deux contributions. Dorénavant, pour des raisons de simplification, nous allons faire référence aux différents modèles des pertes fer en les appelants par leur notation (modèles M1, M2, M3, M4 et M5).

En plus du calcul des pertes fer, le programme développé nous permet également d'avoir la carte de densité des pertes fer et de tracer les loci dans les éléments souhaités.

Dans la méthodologie présentée, les données relatives aux valeurs de l'induction magnétique dans les éléments des milieux magnétiques, en fonction du temps, sont stockées sous forme de fichiers. Le fait de stocker l'induction magnétique $\mathbf{B}(t)$ sous cette forme peut induire un problème de gestion de tailles de fichiers qui peuvent être non négligeables en fonction du nombre d'éléments du maillage. En revanche, l'atout majeur réside dans le fait que, une fois le problème électromagnétique résolu, étape souvent gourmande en temps de calcul, les fichiers sont enregistrés et peuvent

être manipulés pour calculer les pertes en utilisant l'une ou l'autre des approches des pertes fer avec, éventuellement, des valeurs différentes des coefficients. Les procédures de calcul de pertes fer ne nécessitant pas un temps d'exécution important, ce choix peut s'avérer le plus judicieux.

Chapitre 20

Points explorateurs

Ce paragraphe décrit la méthode pour localiser un point, e.g., faisant partie d'une ligne de coupe, dans un élément fini et la conversion de ses coordonnées dans le système de l'élément de référence. On illustre ci-dessous ce problème sur deux cas-tests, utilisant la solution de référence calculée par code_Carmel temporel ¹. En l'état actuel, les éléments de type tétraèdre, prisme et hexaèdres du premier ordre sont possibles. On rencontre un problème pour obtenir les coordonnées du point dans l'hexaèdre de référence, indépendant de la ré-orientation des éléments pratiquée dans le code.

20.1 Méthode de recherche

Dans code_Carmel, lorsque des points explorateurs sont définis, on recherche tout d'abord, les éléments contenant chacun de ces points, en vérifiant, pour toutes les faces "orientées" de l'élément si le point est du côté intérieur de l'élément (cf. Annexe I). Cette opération est menée à partir du maillage original, car on connaît l'ordre des nœuds fournis pour l'élément.

Après ré-orientation des éléments, *i.e.*, les indices des nœuds, vient l'étape de recherche des coordonnées du point dans l'élément de référence. Ces coordonnées serviront directement à l'interpolation du champ à l'endroit approprié.

La transformation des coordonnées géométriques, dans un élément fini, pour passer des coordonnées d'un point dans l'élément de référence aux coordonnées de ce point dans l'espace réel, est très bien définie dans la littérature. Elle utilise des fonctions d'interpolation nodales et ne pose aucune difficulté pratique car la transformation est analytique [Dhatt, Thouzot 1984, Sec 1.5]. La transformation inverse, pour passer des coordonnées de l'espace réel aux coordonnées dans l'élément de référence, n'est pas évidente pour des éléments non-tétraèdriques, car cette transformation n'est pas linéaire et plusieurs écritures de cette transformation sont possibles. Ces écritures sont équivalentes sur le papier mais ne donnent pas les mêmes résultats en pratique. Bien que cela ne soit pas cité dans la littérature, on montre, au cas pas cas, qu'il est possible d'utiliser une méthode basée sur la matrice jacobienne de la transformation géométrique ². Cette matrice est disponible nativement dans un code éléments finis et cette méthode fonctionne en pratique ³. Une méthode équivalente utilise les coordonnées barycentriques [Dhatt, Thouzot 1984, Sec. 2.5.1]. Cette dernière est utilisée en pratique dans Code_Carmel3D fréquentiel [Bereux 2008]. D'après une discussion avec Patrick Dular (Université de Liège), cette deuxième méthode ne fonctionne pas bien avec des éléments d'ordre 2 et plus.

^{1.} code_Carmel (http://code-carmel.univ-lille1.fr) est co-développé par le laboratoire LAMEL issu d'un partenariat entre le laboratoire L2EP (http://l2ep.univ-lille1.fr) et EDF R&D (http://www.edf.fr). La version utilisée pour calculer les lignes de coupe est en cours de développement.

^{2.} L'utilisation de la matrice jacobienne a été suggérée par Thomas Henneron et Yvonnick le Ménach (L2EP).

^{3.} Elle donne de bons résultats pour un maillage extrudé.

20.1.1 Méthode des fonctions nodales

Nous reprenons ici les résultats et les définitions de [Dhatt, Thouzot 1984]. Nous savons que code_Carmel utilise des éléments finis isoparamétriques. Dans ces conditions, on souhaite exprimer les coordonnées d'un point, connu dans l'espace réel $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$, dans le système de l'élément de référence $\boldsymbol{\xi}=(\xi,\eta,\zeta)$. Cette transformation géométrique de l'élément de référence à l'élément réel fait appel aux n fonctions d'interpolation $N_i(\xi,\eta,\zeta)$ où $i\in[1,n]$ et n est le nombre de nœuds de l'élément. La transformation géométrique s'écrit alors :

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi, \eta, \zeta) \boldsymbol{x}_i \tag{20.1}$$

où x_i représente les coordonnées du nœud i dans l'espace réel.

Une écriture plus détaillée conduit à :

$$x = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi, \eta, \zeta) x_i$$
$$y = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi, \eta, \zeta) y_i$$
$$z = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi, \eta, \zeta) z_i$$

Pour les éléments du premier ordre, les fonctions d'interpolation N_i font intervenir des polynômes linéaires, bi-linéaires ou tri-linéaires en ξ , η et ζ .

L'expression (20.1) est difficile à inverser pour exprimer $\vec{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$ à partir de $\vec{x} = (x, y, z)$, ce que nous cherchons. Nous proposons ci-dessous une reformulation, basée sur la matrice jacobienne, qui permet de trouver $\vec{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$.

20.1.2 Méthode de la matrice jacobienne

La matrice jacobienne, notée J dans [Dhatt, Thouzot 1984], permet d'exprimer la déformation de l'élément de référence en élément réel, i.e., sa dilatation et rotation par rapport à un repère lié à l'élément. C'est la matrice 3×3 définie par :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix}$$
(20.2)

Afin d'exprimer les coordonnées dans le repère réel du domaine d'étude, il faut compléter cette transformation par une translation dans le repère réel, de l'élément de référence, *i.e.*, la translation du centre O du repère de référence, *i.e.*, les coordonnées réelles (x_0, y_0, z_0) du centre du repère de référence. La transformation géométrique (20.1) s'écrit alors, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + {}^t J \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$
 (20.3)

où ${}^t\!J$ est la transposée de la matrice jacobienne.

Il suffit d'inverser (20.3) pour obtenir les coordonnées (ξ, η, ζ) du point recherché dans l'élément de référence. La matrice jacobienne J dépend en général de ces coordonnées (ξ, η, ζ) . On la notera alors $J(\xi)$ et l'équation (20.3) inversée s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = {}^{t}J^{-1}(\xi) \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \right\}$$
 (20.4)

Dans le cas où la matrice jacobienne dépend des coordonnées (ξ, η, ζ) , l'équation (20.4) à résoudre est non-linéaire. Une méthode de résolution itérative est alors nécessaire. La méthode de substitution fonctionne en pratique très bien sur les éléments du premier ordre ⁴. Lors de l'itération, le premier calcul de la matrice jacobienne peut utiliser un point quelconque, e.g., le centre de l'élément de référence. Ensuite ce point sera mis à jour avec le résultat de l'itéré précédent.

Cette matrice jacobienne est construite, de manière générale, à l'aide des fonctions d'interpolation N_i de l'élément de référence (cf. équation 20.1). Plus précisément par le produit matriciel de la transposée du gradient de l'ensemble des N_i par la matrice constituée des coordonnées réelles des n nœuds de l'élément :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n \end{pmatrix}$$
(20.5)

où (x_1, y_1, z_1) et (x_n, y_n, z_n) correspondent aux coordonnées du premier et du dernier nœud de l'élément, respectivement.

On note qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser le centre O du repère de référence dans (20.4). Les essais montrent qu'il est possible d'utiliser n'importe lequel des nœuds de l'élément, ou une combinaison linéaire de ces noeuds tel que le centre de l'élément. Ce résultat n'est pas établi analytiquement. Pour un point P quelconque satisfaisant ce critère, dont les coordonnées sont (x_P, y_P, z_P) et (ξ_P, η_P, ζ_P) dans le repère réel et le repère de l'élément de référence, respectivement, l'équation (20.4) peut s'écrire de nouveau :

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_P \\ \eta_P \\ \zeta_P \end{pmatrix} + {}^t J^{-1}(\xi) \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix} \right\}$$
(20.6)

La remarque précédente prend tout son sens en pratique, car cela prend plus de temps de calculer le centre de l'élément plutôt que d'utiliser un point connu, e.g., le premier nœud 5 .

Cette méthode est utilisable facilement car cette matrice jacobienne J est définie dans tout code aux éléments finis utilisant l'élément de référence. Elle ne nécessite, quel que soit le type d'élément, qu'une inversion de matrice 3×3 , ce qui peut être fait analytiquement, *i.e.*, sans nécessiter l'utilisation de librairies externes telles que LAPACK.

On montrera ensuite, au cas par cas, dans quelles conditions cette méthode est équivalente ou pas à la méthode des fonctions nodales.

Il est très important de noter que cette localisation doit être effectuée après orientation des éléments.

20.1.3 Méthode des coordonnées barycentriques

Cette méthode est basée sur le principe de conservation des coordonnées barycentrique d'un point quelconque dans un élément. Ces coordonnées sont les mêmes dans le repère de l'élément de référence et dans le repère propre de l'élément réel.

^{4.} Sur le cube de Rubinacci avec des prismes ou des hexaèdres, la convergence est assurée au bout de 2 pas

^{5.} C'est le premier nœud qui est utilisé dans code_Carmel

Un point quelconque dans un élément peut être défini de façon unique par ses coordonnées barycentriques 6 λ_i . Il y en a autant que de noeuds n, mais seules 3 d'entre elles sont indépendantes bien sûr. Chaque coordonnée barycentrique est définie par le volume relatif du tétraèdre défini par le point recherché et 3 des nœuds de l'élément, e.g., $\lambda_1 = V_1/V$ où V_1 est le volume du tétraèdre défini par le point et les noeuds 2, 3 et 4 de l'élément et V est le volume de l'élément [Dhatt, Thouzot 1984, Sec. 2.5]. La somme de ces coordonnées barycentriques vaut 1 car le volume de l'élément est la somme des n volumes des tétraèdres faisant intervenir le point [Dhatt, Thouzot 1984, Sec. 2.5]. D'où une première dépendance entre les coordonnées barycentriques.

Le calcul, que nous ne détaillerons que dans les exemples, consiste dans un premier temps à trouver les coordonnées barycentriques à partir des coordonnées réelles (x,y,z) du point. En inversant une matrice $n \times n$. Cette matrice peut dépendre de (x,y,z) et trouver les coordonnées barycentriques devient alors un problème non-linéaire. Les coordonnées (ξ,η,ζ) recherchées du point s'obtiennent ensuite par un produit matrice-vecteur d'une matrice $n \times n$ et du vecteur formé les coordonnées barycentriques.

Cette méthode est implémentée dans Code_Carmel3D et code_spectral, par N. Béreux (EDF R&D) pour les tétraèdres et D. Laval (EDF R&D) pour les autres éléments ⁷.

20.2 Tétraèdres

La figure 20.1 montre le tétraèdre de référence à 4 noeuds, de coordonnées (0,0,0), (1,0,0), (0,1,0) et (0,0,1) dans l'ordre de numérotation 1, 2, 3 et 4 des nœuds [Dhatt, Thouzot 1984, Sec. 2.5]. Tout point dans le tétraèdre de référence doit satisfaire les inégalités : $\xi \geq 0$, $\eta \geq 0$, $\zeta \geq 0$ et $1-\xi-\eta-\zeta \geq 0$. Cette définition est la même dans code_Carmel, Code_Carmel3D et code_Carmel spectral.

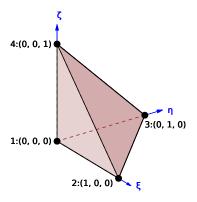


Figure 20.1 – Tétraèdre de référence.

^{6.} Ces coordonnées barycentriques sont notées L_i dans [Dhatt, Thouzot 1984] et λ_i dans [Bereux 2008]. On reprend cette dernière notation dans le reste du texte.

^{7.} Seule l'implémentation pour les prismes fonctionne correctement, après correction toutefois d'un bug recensé sur le site web code-carmel.

20.2. TÉTRAÈDRES 235

20.2.1 Méthode des fonctions nodales

Les 4 fonctions d'interpolation sont : $N_1(\xi, \eta, \zeta) = 1 - \xi - \eta - \zeta$, $N_2(\xi, \eta, \zeta) = \xi$, $N_3(\xi, \eta, \zeta) = \eta$ et $N_4(\xi, \eta, \zeta) = \zeta$ [Dhatt, Thouzot 1984, Sec. 2.5.2]. La relation (20.1) s'écrit alors :

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4$$

= $(1 - \xi - \eta - \zeta) x_1 + \xi x_2 + \eta x_3 + \zeta x_4$
= $x_1 + (x_2 - x_1) \xi + (x_3 - x_1) \eta + (x_4 - x_1) \zeta$

De même pour les relations pour y et pour z. Le tout peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$
(20.7)

le calcul des coordonnées (ξ, η, ζ) du point recherché à partir de ses coordonnées (x, y, z) ne pose pas de difficultés pour ce cas précis, car la matrice multipliant l'inconnue recherchée ne dépend pas de cette inconnue.

20.2.2 Méthode de la matrice jacobienne

La matrice jacobienne J s'écrit, à partir de (20.5) et des 4 fonctions d'interpolation ci-dessus [Dhatt, Thouzot 1984, Sec. 2.5.2] :

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{pmatrix}$$
(20.8)

et l'expression (20.3), où le centre de l'élément est le premier nœud, permet de retrouver (20.7). Ceci montre l'équivalence de cette reformulation pour ce cas précis ⁸.

Cette matrice jacobienne ne dépend pas du point recherché, et le calcul des coordonnées (ξ, η, ζ) du point recherché à partir de ses coordonnées (x, y, z) ne pose pas de difficultés à l'aide de la relation (20.4).

20.2.3 Méthode des coordonnées barycentriques

Le tétraèdre ayant 4 nœuds, il y a 4 coordonnées barycentriques [Dhatt, Thouzot 1984, Sec. 2.5]. Les tétraèdres sont les plus simples de tous les types d'éléments car leur fonction d'interpolation est linéaire en fonction des coordonnées. La recherche des coordonnées, dans l'élément de référence, ne pose alors pas de difficulté. Il faut tout d'abord trouver les 4 coordonnées barycentriques du point dans l'élément réel, en résolvant un système linéaire 4x4 faisant intervenir les coordonnées dans l'élément réel des 4 nœuds du tétraèdre, e.g., (x_1,y_1,z_1) pour le premier nœud (cf. Eq. 20.9).

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$
(20.9)

Ceci est réalisé dans Code_Carmel3D à l'aide de la routine DGESV (factorisation LU) de la bibliothèque LAPACK. On trouve ensuite les coordonnées du point (ξ, η, ζ) dans l'élément de

^{8.} Je pense que cette reformulation avec la matrice jacobienne est vraie pour tous les éléments du 1er ordre, où les fonctions d'interpolation ne font intervenir que des polynômes linéaires, bi-linéaires ou tri-linéaires en ξ , η et ζ . Car la dérivée des ces fonctions d'interpolation redonne la fonction en partie lorsque multipliée par la variable de dérivation. Cela ne serait pas le cas avec des polynômes d'ordre plus élevé.

référence par un produit matrice-vecteur faisant intervenir les coordonnées barycentriques trouvées au paravant et les coordonnées des 4 noeuds dans l'élément de référence, e.g., (ξ_1,η_1,ζ_1) pour le premier nœud (cf. Eq. 20.10). Pour le tétra èdre, les coordonnées des nœuds sont dans l'élément de référence sont (0,0,0), (1,0,0), (0,1,0) et (0,0,1) respectivement .

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}$$
(20.10)

Les équations (20.9) et (20.10) sont issues de la note [Bereux 2008] (cf. Secs. 7.1.1 et 7.2), sans justification ni référence bibliographique. En l'occurrence le système (20.10) est facile à résoudre : on trouve $\xi = \lambda_2$, $\eta = \lambda_3$, $\zeta = \lambda_4$ et, par définition (la somme de ces coordonnées barycentriques vaut 1 car le volume de l'élément est la somme des 4 volumes des tétraèdres faisant intervenir le point), $\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 1 - \xi - \eta - \zeta$ [Dhatt, Thouzot 1984, Sec. 2.5].

20.2.4 Preuve de l'équivalence des deux dernières méthodes

On montre ici comment retrouver la méthode de la matrice jacobienne à partir de la méthode des coordonnées barycentriques.

En exprimant les 4 coordonnées barycentriques λ_1 , λ_2 , λ_3 , λ_4 en fonction des coordonnées (ξ, η, ζ) , le système (20.9) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \xi - \eta - \zeta \\ \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$
 (20.11)

ou encore, en développant,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta + (x_4 - x_1)\zeta \\ (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta + (y_4 - y_1)\zeta \\ (z_2 - z_1)\xi + (z_3 - z_1)\eta + (z_4 - z_1)\zeta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$
(20.12)

qui devient, en supprimant la dernière ligne devenue inutile,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$
(20.13)

qui s'écrit bien sous la forme (20.3) avec la transposée de la jacobienne définie par (20.8) :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + {}^t J \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$
 (20.14)

où le centre du repère de l'élément de référence est bien le premier nœud (x_1,y_1,z_1) .

20.3. PRISMES 237

20.3 Prismes

La figure 20.2 montre le prisme de référence à 6 nœuds, de coordonnées (0,0,-1), (1,0,-1), (0,1,-1), (0,0,1), (1,0,1) et (0,1,1) dans l'ordre de numérotation 1, 2, 3, 4, 5 et 6 des noeuds [Dhatt, Thouzot 1984, Sec. 2.7].

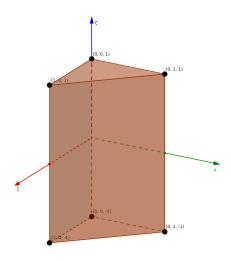


Figure 20.2 – Prisme de référence.

Tout point dans le prisme de référence doit satisfaire les inégalités : $\xi \ge 0, \, \eta \ge 0, \, -1 \le \zeta \le 1$ et $1-\xi-\eta \ge 0$. Cette définition est la même dans code_Carmel, Code_Carmel3D et code_Carmel spectral.

20.3.1 Méthode des fonctions nodales

Les 6 fonctions d'interpolation sont : $N_1(\xi, \eta, \zeta) = \lambda a$, $N_2(\xi, \eta, \zeta) = \xi a$, $N_3(\xi, \eta, \zeta) = \eta a$, $N_4(\xi, \eta, \zeta) = \lambda b$, $N_5(\xi, \eta, \zeta) = \xi b$, $N_6(\xi, \eta, \zeta) = \eta b$ où $\lambda = 1 - \xi - \eta$, $a = (1 - \zeta)/2$ et $b = (1 + \zeta)/2$ [Dhatt, Thouzot 1984, Sec. 2.7.1]. On peut aussi les écrire sous la forme abrégée :

$$N(\xi, \eta, \zeta) \equiv (N_1(\xi, \eta, \zeta), N_1(\xi, \eta, \zeta), \dots, N_n(\xi, \eta, \zeta))$$

$$= (\lambda a, \xi a, \eta a, \lambda b, \xi b, \eta b)$$
(20.15)

La relation (20.1) s'écrit alors :

$$x = \sum_{i=1}^{6} N_{i}x_{i}$$

$$= \lambda ax_{1} + \xi ax_{2} + \eta ax_{3} + \lambda bx_{4} + \xi bx_{5} + \eta bx_{6}$$

$$= a(\lambda x_{1} + \xi x_{2} + \eta x_{3}) + b(\lambda x_{4} + \xi x_{5} + \eta x_{6})$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ (1 - \zeta) \left[(1 - \xi - \eta)x_{1} + \xi x_{2} + \eta x_{3} \right] + (1 + \zeta) \left[(1 - \xi - \eta)x_{4} + \xi x_{5} + \eta x_{6} \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ x_{1} + x_{4} + \xi \left[(1 - \zeta)(x_{2} - x_{1}) + (1 + \zeta)(x_{5} - x_{4}) \right] + \eta \left[(1 - \zeta)(x_{3} - x_{1}) + (1 + \zeta)(x_{6} - x_{4}) \right] + \zeta(x_{4} - x_{1}) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ x_{1} + x_{4} + \xi(x_{2} - x_{1} + x_{5} - x_{4}) + \eta(x_{3} - x_{1} + x_{6} - x_{4}) + \zeta(x_{4} - x_{1}) \right\}$$

$$+ \zeta \left[x_{4} - x_{1} + \xi(x_{1} - x_{2} + x_{5} - x_{4}) + \eta(x_{1} - x_{3} + x_{6} - x_{4}) \right] \right\}$$

$$+ \zeta \left[x_{4} - x_{1} + \xi(x_{1} - x_{2} + x_{5} - x_{4}) + \eta(x_{1} - x_{3} + x_{6} - x_{4}) \right] \right\}$$

$$(20.18)$$

où l'on voit deux expressions possibles, (20.17) et (20.18), pour factoriser (ξ, η, ζ) .

En pratique la première expression (20.17) a une mauvaise convergence non-linéaire lorsque les éléments ne sont pas extrudés, et nous gardons la deuxième expression (20.18), inspirée de la méthode de la matrice jacobienne, qui a toujours donné de bons résultats lors de nos essais 9 . Une relation semblable existe pour y et z. L'équation (20.18) peut s'exprimer sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 + x_4 \\ y_1 + y_4 \\ z_1 + z_4 \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$
 (20.19)

où la translation se fait par rapport au barycentre des nœuds 1 et 4 et la matrice M vaut :

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 + x_5 - x_4 & x_3 - x_1 + x_6 - x_4 & x_4 - x_1 + \xi(x_1 - x_2 + x_5 - x_4) + \eta(x_1 - x_3 + x_6 - x_4) \\ y_2 - y_1 + y_5 - y_4 & y_3 - y_1 + y_6 - y_4 & y_4 - y_1 + \xi(y_1 - y_2 + y_5 - y_4) + \eta(y_1 - y_3 + y_6 - y_4) \\ z_2 - z_1 + z_5 - z_4 & z_3 - z_1 + z_6 - z_4 & z_4 - z_1 + \xi(z_1 - z_2 + z_5 - z_4) + \eta(z_1 - z_3 + z_6 - z_4) \end{pmatrix}$$

$$(20.20)$$

Afin de trouver les coordonnées (ξ, η, ζ) à partir des coordonnées (x, y, z), il est nécessaire de résoudre le système non-linéaire :

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = M(\vec{\xi})^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 + x_4 \\ y_1 + y_4 \\ z_1 + z_4 \end{pmatrix} \right\}$$
(20.21)

où $\vec{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$ représente le point recherché.

Une méthode, itérative, est celle de la substitution, qui exprime la solution $\vec{\xi}_{n+1}$ à l'itéré n+1 en fonction de la solution $\vec{\xi}_n$ à l'itéré précédent, à partir d'une approximation initiale de la solution. Eq. 20.21 s'écrit alors : $\vec{\xi}_{n+1} = M(\vec{\xi}_n)^{-1}\vec{b}$ où $\vec{b} = \vec{x} - (\vec{x_1} + \vec{x_4})/2$. L'itération se poursuit jusqu'à ce que le résidu de l'équation $\|\vec{\xi}_{n+1} - \vec{\xi}_n\|$ soit suffisamment proche de 0. Cette méthode ne pose pas de difficulté en pratique, en utilisant le centre de l'élément de référence (1/3, 1/3, 0) par exemple comme point initial, lorsque le maillage est extrudé (2 itérations maximum). La convergence est plus lente pour un maillage non extrudé (jusqu'à 30 itérations pour atteindre un résidu de 1e-12).

On définit ci-dessous la méthode non-linéaire de Newton-Raphson, afin d'améliorer éventuellement cette convergence à partir de la connaissance de la dérivée première de la matrice M, analytique. On rappelle que la méthode de Newton-Raphson cherche à trouver la solution x au problème f(x) = 0, par une méthode itérative basée sur le développement de f(x) au premier ordre : $f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$, ce qui revient ici à exprimer la solution à l'itération $n+1: x_{n+1} = x_n + f(x_n)/f'(x_n)$ à partir de la solution à l'itération précédente, à partir d'une estimation initiale de la solution.

Notre problème matriciel (20.19) s'écrit alors : $f(\vec{\xi}) = M(\vec{\xi})\vec{\xi} - \vec{b}$ où ne dépend pas de $\vec{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$. La dérivée de f s'écrit alors $f'(\vec{\xi}) = M(\vec{\xi}) + \vec{\xi} dM/d\vec{\xi} = M + \xi dM/d\xi + \eta dM/d\eta + \zeta dM/d\zeta$, ce qui donne :

$$\vec{\xi} \frac{dM}{d\vec{\xi}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \xi(x_1 - x_2 + x_5 - x_4) + \eta(x_1 - x_3 + x_6 - x_4) \\ 0 & 0 & \xi(y_1 - y_2 + y_5 - y_4) + \eta(y_1 - y_3 + y_6 - y_4) \\ 0 & 0 & \xi(z_1 - z_2 + z_5 - z_4) + \eta(z_1 - z_3 + z_6 - z_4) \end{pmatrix}$$
(20.22)

et le système linéaire itératif à résoudre s'écrit :

^{9.} Essais réalisés sur le cube de Rubinacci composé de prismes purs dont l'un est déformé, i.e., avec un de ses nœuds déplacé selon les 3 directions de l'espace.

20.3. PRISMES 239

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}_n + dM(\vec{\xi}_n)^{-1} \left[\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 + x_4 \\ y_1 + y_4 \\ z_1 + z_4 \end{pmatrix} \right\} - M(\vec{\xi}_n) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}_n \right] (20.23)$$

où la matrice dérivée dM, à inverser, s'écrit, à partir de (20.20) et (20.22):

$$dM = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 + x_5 - x_4 & x_3 - x_1 + x_6 - x_4 & x_4 - x_1 + 2\xi(x_1 - x_2 + x_5 - x_4) + 2\eta(x_1 - x_3 + x_6 - x_4) \\ y_2 - y_1 + y_5 - y_4 & y_3 - y_1 + y_6 - y_4 & y_4 - y_1 + 2\xi(y_1 - y_2 + y_5 - y_4) + 2\eta(y_1 - y_3 + y_6 - y_4) \\ z_2 - z_1 + z_5 - z_4 & z_3 - z_1 + z_6 - z_4 & z_4 - z_1 + 2\xi(z_1 - z_2 + z_5 - z_4) + 2\eta(z_1 - z_3 + z_6 - z_4) \end{pmatrix}$$

$$(20.24)$$

En pratique, la méthode de Newton-Raphson n'apporte pas d'amélioration sur un maillage extrudé, et elle converge même plus lentement la plupart du temps que la méthode de la substitution sur un maillage non extrudé ¹⁰.

On peut finalement remarquer que l'on peut comprendre aisément pour quoi la convergence est aussi bonne pour un maillage extrudé. Il existe alors une relation entre les coordonnées des nœuds d'un élément qui rend ce problème linéaire. Par exemple pour des prismes orientés selon l'axe Oz, on a $x_5 = x_2$, $x_4 = x_1$ et $x_6 = x_3$ ce qui permet d'écrire $x_1 - x_2 + x_5 - x_4 = 0$ et $x_1 - x_3 + x_6 - x_4 = 0$. De même pour la relation en y pour les mêmes raisons. Ceci est valable aussi pour la relation en z car la distance Δz entre les deux faces triangulaires du prismes est la même en tout point, *i.e.*, pour tous ses nœuds. Alors $z_5 - z_2 = z_6 - z_3 = z_4 - z_1 = \Delta z$, ce qui permet d'écrire $z_1 - z_2 + z_5 - z_4 = 0$ et $z_1 - z_3 + z_6 - z_4$. Au final, la matrice M ne dépend plus que des coordonnées des nœuds et non plus des inconnues ξ ni ζ . Elle s'écrit :

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 + x_5 - x_4 & x_3 - x_1 + x_6 - x_4 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 + y_5 - y_4 & y_3 - y_1 + y_6 - y_4 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 + z_5 - z_4 & z_3 - z_1 + z_6 - z_4 & z_4 - z_1 \end{pmatrix}$$
(20.25)

La méthode de Newton-Raphson est alors équivalente, analytiquement, à la méthode de la substitution, mais rajoute une éventuelle erreur d'arrondi.

20.3.2 Méthode de la matrice jacobienne

La matrice jacobienne s'écrit :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_{1}}{\partial \xi} & \frac{\partial N_{2}}{\partial \xi} & \cdots & \frac{\partial N_{6}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_{1}}{\partial \eta} & \frac{\partial N_{2}}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial N_{6}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_{1}}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_{2}}{\partial \zeta} & \cdots & \frac{\partial N_{6}}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_{1} & y_{1} & z_{1} \\ x_{2} & y_{2} & z_{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{6} & y_{6} & z_{6} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -a & a & 0 & -b & b & 0 \\ -a & 0 & a & -b & 0 & b \\ -\lambda/2 & -\xi/2 & -\eta/2 & \lambda/2 & \xi/2 & \eta/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_{1} & y_{1} & z_{1} \\ x_{2} & y_{2} & z_{2} \\ x_{3} & y_{3} & z_{3} \\ x_{4} & y_{4} & z_{4} \\ x_{5} & y_{5} & z_{5} \end{pmatrix}$$
(20.26)

où
$$\lambda = 1 - \xi - \eta$$
, $a = (1 - \zeta)/2$ et $b = (1 + \zeta)/2$ ont été définies plus haut (cf. Sec. 20.3.1).

Nous allons détailler ci-dessous l'expression de x, et montrer dans quels cas elle est équivalente à la méthode des fonctions nodales. A partir de (20.3) et (20.26), on peut écrire x =

¹⁰. Testé sur le cube de Rubinacci avec 500 prismes extrudés selon l'axe Ox, avec un nœud déplacé selon Oz pour créer deux éléments non extrudés.

 $x_0 + J_{11}\xi + J_{21}\eta + J_{31}\zeta$ où $J_{11} = a(x_2 - x_1) + b(x_5 - x_4), \ J_{21} = a(x_3 - x_1) + b(x_6 - x_4)$ et $J_{31} = \frac{1}{2} \left[\lambda(x_4 - x_1) + \xi(x_5 - x_2) + \eta(x_6 - x_3) \right]$. Le tout s'écrit alors :

$$x = x_0$$

$$+\xi \left[(1-\zeta)(x_2 - x_1) + (1+\zeta)(x_5 - x_4) \right]$$

$$+\eta \left[(1-\zeta)(x_3 - x_1) + (1+\zeta)(x_6 - x_4) \right]$$

$$+\zeta \left[x_4 - x_1 + \xi(x_1 - x_2 + x_5 - x_4) + \eta(x_1 - x_3 + x_6 - x_4) \right]$$
(20.27)

De même pour y et z. On voit que (20.27) est équivalente à (20.17) si et seulement si :

- 1. Le point de translation x_0 est bien le centre de l'élément de référence $(x_1 + x_4)/2$,
- 2. La dépendance en ξ et η de la dernière ligne est nulle, i.e., $x_1-x_2+x_5-x_4=0$ et $x_1-x_3+x_6-x_4=0$.

Ces deux conditions doivent être remplies aussi par les autres composantes y et z.

Concernant la condition 2) sur l'annulation, elle est possible pour tout maillage extrudé car il existe une relation entre les coordonnées des nœuds (cf. Sec. 20.3.1). Ceci est encore vrai si le maillage subit une rotation quelconque par rapport à $Oxyz^{11}$, car cette rotation conserve les relations ci-dessous en mélangeant simplement les relations en x, y et z. Ceci n'est plus vrai par contre si un élément est déformé. En ce cas la méthode de la matrice jacobienne ne donne pas les bons résultats par rapport à la méthode des fonctions nodales 12 .

20.3.3 Méthode des coordonnées barycentriques

Cette méthode a été programmée par Damien Laval (EDF R&D). Le code ne contient pas de commentaires et reprend en grandes partie les notations introduites pour les tétraèdres (cf. Sec. 20.2.3). L'algorithme 20.1 est décodé ci-dessous, en reprenant les notations des sections précédentes. On résout le problème matriciel (taille 4x4) :

$$A\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \\ \mu \end{pmatrix} = b = 2 \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 + x_4 \\ y_1 + y_4 \\ z_1 + z_4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
(20.28)

où la matrice $4x4: A = A_{LIN} + A_{NLIN}$ est décomposée en ses parties linéaire et non-linéaire :

$$A_{LIN} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 + x_5 - x_4 & x_3 - x_1 + x_6 - x_4 & x_4 - x_1 & 1\\ y_2 - y_1 + y_5 - y_4 & y_3 - y_1 + y_6 - y_4 & y_4 - y_1 & 1\\ z_2 - z_1 + z_5 - z_4 & z_3 - z_1 + z_6 - z_4 & z_4 - z_1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(20.29)

et

$$A_{NLIN} = \zeta \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_5 - x_4 & x_1 - x_3 + x_6 - x_4 & 0 & 0 \\ y_1 - y_2 + y_5 - y_4 & y_1 - y_3 + y_6 - y_4 & 0 & 0 \\ z_1 - z_2 + z_5 - z_4 & z_1 - z_3 + z_6 - z_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 (20.30)

La résolution du système (20.28), non-linéaire en ζ , est menée de façon itérative, à partir de la valeur initiale $(\xi, \eta, \zeta, \mu) = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$, jusqu'à ce que le résidu de ce système soit proche de 0. La 4ème inconnue μ n'en est pas vraiment une car le système (20.28) conduit à la solution $\mu = 1$. Les notations de l'algorithme sont : ALIN pour A_{LIN} , ANLIN pour A_{NLIN} , lambda_tot(1:4) pour

^{11.} Nous l'avons testé sur le cube de Rubinacci tournée de 45° par rapport à l'axe Ox.

^{12.} Nous l'avons testé en déplaçant un nœud selon les 3 directions de l'espace, puis en effectuant une ligne de coupe le long de l'arête déformée. La méthode des fonctions nodales retrouve bien les coordonnées $\xi=0,\,\eta=1$ et $\zeta\in[-1,1]$ comme il se doit. La méthode de la matrice jacobienne trouve $\zeta\in[-0.666...,0.666]$. Le tracé du champ est bien meilleur pour la méthode des fonctions nodales.

20.3. PRISMES 241

 (ξ, η, ζ, μ) . L'équivalence entre λ_{tot} et les coordonnées du point dans l'élément de référence n'est pas évidente. Elle est prouvée ci-après. L'algorithme 20.1 exprime ces coordonnées en fonctions des coordonnées des nœuds du prisme dans l'élément de référence : xi(i), eta(i) et zeta(i), et d'un vecteur lambda de taille 6. Ces relations s'écrivent :

$$\xi = \sum_{i=1}^{6} \xi_{i} \lambda_{i} = \lambda_{2} + \lambda_{5} = \lambda_{tot}(1)$$

$$\eta = \sum_{i=1}^{6} \eta_{i} \lambda_{i} = \lambda_{3} + \lambda_{6} = \lambda_{tot}(2)$$

$$\zeta = \sum_{i=1}^{6} \zeta_{i} \lambda_{i} = \lambda_{4} + \lambda_{5} + \lambda_{6} - (\lambda_{1} + \lambda_{2} + \lambda_{3}) = \lambda_{tot}(3)$$

$$(20.31)$$

en utilisant les coordonnées connues ξ_i , η_i et ζ_i des nœuds dans l'élément de référence (cf. Sec. 20.3). Tout ceci est équivalent à la méthode des fonctions nodales en utilisant la première expression (20.17), ce qui pose des problèmes de convergence lorsque le maillage n'est pas extrudé, comme on l'a constaté. Bien que l'algorithme 20.1 soit mis sous une forme appropriée à la méthode non-linéaire de Newton-Raphson, la matrice inversée n'est pas la bonne et la méthode utilisée est celle de la substitution. Avec probablement des erreurs d'arrondi provenant de cette forme et peut-être de la quatrième dimension inutile.

Algorithme 20.1 Méthode des coordonnées barycentriques programmée pour les prismes.

```
ALIN(1:4,1:4) = 0
ALIN(1,1) = -x1 + x2 - x4 + x5
... de même pour ALIN(2,1) et ALIN(3,1) en remplaçant x par y et z, respectivement
ALIN(1,2) = -x1 + x3 - x4 + x6
... de même pour ALIN(2,2) et ALIN(3,2) en remplaçant x par y et z, respectivement
ALIN(1,3) = -x1 + x4
... de même pour ALIN(2,3) et ALIN(3,3) en remplaçant x par y et z, respectivement
ALIN(4, :) = 1
b(1) = 2 * x - (x1 + x4)
... de même pour b(2) et b(3) en remplaçant x par y et z, respectivement
b(4) = 1
lambda tot(1:4) = 0.25
ANLIN(1:4,1:4) = 0
ANLIN(1,1) = lambda\_tot(3) * (x1 - x2 - x4 + x5)
... de même pour ANLIN(2,1) et ALIN(3,1) en remplaçant x par y et z, respectivement
ANLIN(1,2) = lambda\_tot(3) * (x1 - x3 - x4 + x6)
... de même pour ANLIN(2,2) et ALIN(3,2) en remplaçant x par y et z, respectivement
ANLIN = ANLIN + ALIN
res(1:4) = b(1:4) - ANLIN(1:4,1:4) * lambda tot(1:4)
err = 1
iter = 0
tant que boucle tant que : iter < 50 et err > 1e-12 faire
  lambda2(1:4) = res(1:4)
  inversion de ANLIN par la routine LAPACK DGESV -> lambda2 = inverse(ANLIN)*lambda2
  lambda\_tot(1:4) = lambda\_tot(1:4) + lambda2(1:4)
  mise à jour de ANLIN avec la nouvelle valeur de lambda_tot
  ANLIN = ANLIN + ALIN
  mise à jour de res et err
fin tant que
lambda(1) = (1 - lambda\_tot(1) - lambda\_tot(2)) * (1 - lambda\_tot(3)) / 2
lambda(2) = lambda tot(1) * (1 - lambda tot(3)) / 2
lambda(3) = lambda\_tot(2) * (1 - lambda\_tot(3)) / 2
lambda(4) = (1 - lambda\_tot(1) - lambda\_tot(2)) * (1 + lambda\_tot(3)) / 2
lambda(5) = lambda\_tot(1) * (1 + lambda\_tot(3)) / 2
lambda(6) = lambda tot(2) * (1 + lambda tot(3)) / 2
xi = somme sur i de 1 à 6 de xi(i) * lambda(i)
eta = somme sur i de 1 à 6 de eta(i) * lambda(i)
zeta = somme sur i de 1 à 6 de zeta(i) * lambda(i)
```

Bibliographie

[Albanese, Rubinacci 2000]

[Alotto, Perugia 2004]

[,	method for magnetostatics. IEEE Trans. Mag, Vol. 40, No 3, 2004.	
[Ammari et al 2000]	Habib Ammari, Annalisa Buffa, Jean-Claude Nédelec A justification of eddy currents models for the Maxwell's equations SIAM Appl. Math., 60(5), pp. 1805-1823, May 2000.	
[Antunes et al 2005]	O. J. Antunes, J. P. A. Bastos, N. Sadowski, A. Razek, L. Satendrea, F. Bouillault, F. Rapetti, <i>Using hierarchic interpolatic with mortar element method for electrical machines</i> , IEEE Transagn., vol. 41, n°5, pp 1472-1475, 2005.	
[Antunes et al 2006]	O.J. Antunes, J. P. A. Bastos, N. Sadowski, A. Razek, L. Santandrea, F. Bouillault and F. Rapetti, <i>Comparison between non conforming movement methods</i> , IEEE Transactions on Magnetics vol. 42, n°4, pp 599-x, 2006.	
[Bastos, Sadowski 2003]	J. P. A. Bastos and N. Sadowski <i>Electromagnetic Modeling by Finite Element Methods</i> 1st ed. CRC Press, 2003.	
[Bereux 2008]	N. Béreux, $code_Carmel3D$: mise en œuvre de la version 1. note technique EDF R&D, H-R25-2008-03705-FR, 2008.	
[Bertotti 1988]	G. Bertotti General properties of power losses in soft ferromagnetic materials IEEE Transactions on Magnetics, vol. 24, no. 1, pp. 621–630, Jan. 1988.	
[Bertotti 1998]	G. Bertotti <i>Hysteresis in magnetism : for physicists, materials scientists, and engineers</i> , Gulf Professional Publishing, 1998.	
[Biddlecombe et al 1988]	Biddlecombe, C.S.; Simkin, J.; Jay, A.P.; Sykulski, J.K.; Lepaul S. <i>Transient electromagnetic analysis coupled to electric circuit:</i> and motion, IEEE Trans. Magn., vol. 34, Issue 5, Part 1, 3182-3185, 1998.	
[Biro et al 1993b]	O.Biro, K.Preis, G.Vrisk, K.R.Richter, I.Ticar Computation of 3L magnetostatic fields using a reduced scalar potential, IEEE Trans Mag., vol.29, no.2, pp. 1329-1332, 1993.	
[Biro et al 1993]	O. Biro, K. Preis, W. Renhart, G. Vrisk, K. R. Richter, Computation of a 3D current driven skin effect problems using a curren vector potential, IEEE Trans. Mag., vol. 29, pp 1325-1328, 1993.	
[Biro, Preis 2000]	O. Biro, K. Preis. An edge finite element eddy current formulation using magnetic and a current vector potential. IEEE Trans. Mag., vol. 36, No 5, pp. 3128-3130, 2000.	
	243	

Engng., Vol. 49, pp 573-598, 2000.

A. Albanese, G. Rubinacci Magnetostatic field computations in terms of two component vector potentials Int. J. Numer. Meth.

P. Alotto, I. Perugia. $Matrix\ properties\ of\ a\ vector\ potential\ cell$

[Boiteau 2014] O. Boiteau, Amélioration des fonctionnalités solveurs linéaire de Code Carmel v1.12.0 : manuel théorique, manuel utilisateur et descriptif informatique, note technique RDF R&D, H-I23-2014-00544-FR, date à préciser. [Bossavit, Vérité 1983] A. Bossavit, J.-C. Vérité The Trifou code: solving the 3D eddy current problem by using h as a state variable I.E.E.E. Trans. on Magnetics, Vol. 19, no 6, pp 2465-2471, 1983 A. Bossavit. Électromagnétisme en vue de la modélisation Edition [Bossavit 1993] Springerverlag, 1993. [Bossavit 2003] A. Bossavit, Mixed-hybrid methods in magnetostatics: complementarity in one stroke, IEEE Trans. Mag, Vol. 39, No 3, pp 1099-1102, 2003. [Bossavit, Kettunen 2000] A. Bossavit, L. Kettunen. Yee-likes schemes on staggered cellulargrids: a synthesis between FIT and FEM approaches. IEEE Trans. Mag, Vol. 36, No 4, pp 861-867, 2000. [Boualem 1997] B. Boualem Contribution à la modélisation des systèmes électrotechniques à l'aide des formulations en potentiels : application à la machine asynchrone Thèse de doctorat, Université des sciences et technologies de Lille, 1997. B. Boualem, F. Piriou On the use of potentials to study of 3D [Boualem, Piriou 1996] magnetostatic problems, International Workshop on electric and magnetic fields, Liège 1996. [Boualem, Piriou 1998] B. Boualem, F. Piriou Numerical models for rotor cage induction machines using finite element method IEEE Trans. Magn. vol. 34, n° 5, pp3202-3205, 1998. B. Boualem, F. Piriou Modélisation 3D du circuit électrique et [Boualem, Piriou 1998b] du mouvement : application à la machine asynchrone European Physical Journal Applied Physics, vol.1 n°1, pp 67-71, 1998. [Boukari 2000] N. Boukari Modélisation du mouvement à l'aide de codes de calcul par éléments finis en 3D : application à la machine homo polaire et au micro actionneur électrostatique, Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique, Toulouse, juillet 2000. [Bouissou 1994] S. Bouissou Comparaison des formulations en potentiel, pour la résolution numérique en 3D des équations magnétiques couplées aux équations du circuit électrique, Thèse de doctorat, Université de Paris VI, Juillet 1994. [Brissoneau 1997] P. Brissonneau Magnétisme et matériaux magnétiques pour l'électrotechnique, Hermes Sciences Publicat., 1997 [Cahouet 1992] J. Cahouet Modélisations simplifiées des champs électromagnétiques basses et moyennes fréquences en présence d'un être humain, note technique EDF R&D, HI72/7705, août 1992. [Chaitin-Chatelin et Frayssé 1996] F. Chaitin-Chatelin, V. Frayssé Lectures on Finite Precision Computations, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1996. [Chavanne 1988] J. Chavanne Contribution à la modélisation des systèmes statiques à aimants permanents, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1988. [Clemens, Weiland 1987] M. Clemens, T. Weiland. Discrete electromagnetics: Maxwell's equations tailored to numerical simulations. Compumag 1987,

Graz, Autriche, pp 13-20, 1987.

[Costabel]

Costabel M, Dauge M Espaces fonctionnels Maxwell: Les gentils, les méchants et les singularités", http://perso.univrennes1. fr/monique.dauge/publis/CoDaZmax.pdf

[Coulomb 1983]

J. - L. Coulomb A methodology for the determination of global electromechanical quantities from the finite element analysis and its application to the evaluation of magnetic forces, torques and stiffness, I.E.E.E. Trans. on Magnetics, vol. 19, no. 6, pp. 2514-2519, 1983

[Coulomb, Meunier 1984]

J. - L. Coulomb, G. meunier Finite Element Implementation of virtual work principle for magnetic or electric force and torque computation, I.E.E.E. Trans. on Magnetics, vol. 20, no. 5, pp. 1894-1896, 1984

[Daveau, Rioux-Damidau 1999]

C. Daveau, F. Rioux-Damidau, New (e,h) formulation coupling a finite element method and a boundary integral method for the computation of the interaction of waves with a conducting domain, IEEE Trans. Mag, Vol. 35, No 2, pp 1014-1018, 1999.

[Deliège 2003]

G. Deliège Flexible implementation of the finite element method applied to 3D coupled problems considering convective effects, PhD thesis, Katholieke Universiteit Leuven, décembre 2003.

[Dembo,Steihaug1983]

R. S. Dembo, T. Steihaug Truncated-Newton algorithms for large-scale unconstrained optimization, Math. Programming, 26(2): pp.190–212, 1983

[Demenko et al 2006]

A. Demenko, K. Hameyer, L. Nowak, K. Zawirski, X. Shi, Y. Le Menach, J.-P. Ducreux, F. Piriou Comparison of slip surface and moving band techniques for modelling movement in 3D with FEM COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering, Emerald Group Publishing Limited, Vol. 25, No 1, pp17-30, 2006.

[Dhatt, Thouzot 1984]

G. Dhatt, G. Thouzot, *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Coll. Université de Compiègne, Ed. Maloine S.A., Paris, 2nd éd., 1984.

[Dreher et al 1996]

T. Dreher, R. Perrin-Bit, G. Meunier and J. L. Coulomb A three dimensional finite element modelling of rotating machines involving movement and external circuit, IEEE Trans. Magn. vol. 32, n° 3, pp1070-1073, 1996.

[Dular 1994]

P. Dular. Modélisation du champ magnétique et des courants induits dans des systèmes tridimensionnels non linéaires, Thèse de doctorat, Université de Liège - Faculté des Sciences Appliquées, 1994.

[Dular et al 1996]

P. Dular, F. Robert, J.F. Remacle, M. Umé, W. Legros Computation of the source current density in inductors of any shape using a mixed formulation, Third International Workshop on Electric and Magnetic Fields, pp. 107-112, Liège 1996.

[Dular, Legos 1998]

P. Dular, W. Legros Coupling of local and global quantities in various finite element formulations and its application to electrostatics, magnetostatics and magnetodynamics IEEE Trans. Mag, Vol. 34, No 5, pp. 3078-3081, 1998.

[Durand 1968]

E. Durand, Magnétostatique. Edition Masson et Cie, 1968.

[Enokizono et al 1990]

M. Enokizono, T. Suzuki, J. Sievert, and J. Xu *Rotational power loss of silicon steel sheet* IEEE Transactions on Magnetics, vol. 26, no. 5, pp. 2562–2564, Sep. 1990.

[Féliachi 1981] M. Féliachi Contribution au calcul du champ électromagnétique par la méthode des éléments finis en vue d'une modélisation dynamique de machines électriques, Thèse de Docteur Ingénieur, LGEP, 1981. [Fiorillo, Novikov 1990] F. Fiorillo and A. Novikov An improved approach to power losses in magnetic laminations under nonsinusoidal induction waveform IEEE Transactions on Magnetics, vol. 26, no. 5, pp. 2904–2910, Sep. 1990. [Fournet 1985] F. Fournet, Électromagnétisme à partir des équations locales. Édition Masson, 1985. [Fujiwara et al 1993] K. Fujiwara, T. Nakata, H. Fusayasu. Acceleration of convergence characteristic of the ICCG method IEEE Trans. Mag., vol. 29, No 2, pp. 1958-1961, 1993. [Gasmi 1996] N. Gasmi Contribution à la modélisation des phénomènes électriques- magnétiques couplés et du mouvement, pour les systèmes électromagnétiques en 3D, Thèse de Doctorat, Université Paris-VI, octobre 1996. [Geuzaine 2001] C. Geuzaine High order hybrid finite element schemes for Maxwell's equations taking thin structures and global quantities into account, PhD thesis, Université de Liège, octobre 2001. [Girault 2006] V. Girault Approximations variationnelles des EDP, Cours de DEA, 2005-2006. [Goby 1987] F. Goby Utilisation d'une méthode couplée : élément finis - élément de frontière, pour le calcul des forces dans des dispositifs électromagnétiques. Application au calcul du couple d'une machine à réluctance variable, Thèse de Doctorat de l'Université Paris-VI, LGEP, septembre 1987. [Golias, Tsiboukis 1994] N.A.Golias, T.D. Tsiboukis Magnetostatics with edge element: a numerical investigation in the choice of the tree, IEEE Trans. Mag., vol. 30, no .5,pp. 2877-2880, 1994. [Golovanov 1997] C. Golovanov Développement de formulations éléments finis 3D en potentiel vecteur magnétique : application à la simulation de dispositifs électromagnétiques en mouvement, Thèse de doctorat, INPG, 1997. [Golovanov et al 1998] C. Golovanov, Y. Marechal, G. Meunier 3D edge element based formulation coupled to electric circuits IEEE Trans. Mag., vol. 34, No 5, pp. 3162-3165, 1998. [Gondran, Minoux 1995] M. Gondran, M. Minoux Graphes et algorithmes, Collection des études et recherches de EDF, Editions Eyrolles, 1995 [Goursaud 2015] B. Goursaud Note de principe de Code_Carmel3D version 2.5.0, note technique EDF R&D, H-R26-2015-05615-FR, novembre 2015 [Gradinaru 1999] V Gradinaru and R Hiptmair Whitney elements on pyramids,

[Henneberger, Hadrys 1993] G. Henneberger, W. Hadrys, On the nature of different approaches for the calculation of magnetic forces and their mechanical displa-

cement, Compumag, pp.2-3, 1993.

[Henneron 2004]

T. Henneron Contribution à la prise en compte des Grandeurs Globales dans les Problèmes d'Électromagnétisme résolus avec la Méthode des Éléments Finis, Thèse de doctorat de l'Université des Sciences et Technologies de Lille soutenue le 15 décembre 2004.

Electronic Transactions on Numerical Analysis, 8 :pp. 154–168,

[Henneron et al 2005] T. Henneron, S. Clenet, P. Dular, F. Piriou Discrete Finite Element characterisations of source fields for volume boundary constraints in electromagnetic problems ACOMEN 2005. [Higham 2002] N. J. Higham Accuracy and Stability of Numerical Algorithms Society for Industrial and Applied Mathematics, second edition, 2002 [Johnson 1987] C. Johnson Numerical solution of partial differential equations by the finite element method Cambridge University Press, Cambridge, 1987. [Kameari, Koganezawa 1997] A.Kameari, K.Koganezawa Convergence of ICCG method in FEM using edge elements without gauge condition, IEEE Trans. Mag., vol 33, pp. 1223-1226, 1997. [Kawase et al 1995] Y. Kawase, T. Yamaguchi and Y. Hayashi Analysis of Cogging Torque of Permanent Magnet Motor by 3-D finite Element Method IEEE Trans. Magn. vol. 31, n°3, pp 2044-2047, 1995. [Kawase et al 1998] Y. Kawase, T. Mori, T. Ota. Magnetic field analysis of coupling transformers for electric vehicle using 3-D finite element method. IEEE Trans. Mag., vol. 34, No 5, pp. 3186-3189, 1998. [Kelley 2003] C. T. Kelley Solving nonlinear equations with Newton's method. Fundamentals of Algorithms, SIAM, 2003. [Kettunen et al 1999] L. Kettunen, K. Forsman, A. Bossavit Gauging in Whitney spaces IEEE Trans. Mag., vol. 35, No 3, pp 1466-1469, 1999. [Kladas, Tegopoulos 1992] A.G. Kladas and J.A. Tegopoulos A new potential formulation for 3D magnetotatic necessiting no source field computation, IEEE Trans. Mag., vol 28, no 2, pp. 1103-1106, 1992. [Korecki 2009] J. Korecki Contribution à la modélisation 3D des systèmes électromagnétiques basse fréquence à l'aide de la méthode d'intégration finie(FIT) Thèse de doctorat de l'Université des Sciences et Technologies de Lille soutenue le 15 mai 2009. [Kuczmann 2010] M. Kuczmann Technique to Solve Nonlinear Static Magnetic Field Problems Using the Newton-Raphson Method in the Polarization, IEEE Transactions on Magnetics, 46(3): pp. 875–879 2010. [Le Floch 2002] Y. Le Floch. Développement de formulations 3D éléments finis pour la prise en compte de conducteurs massifs et bobinés avec un couplage circuit. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2002. [Le Menach et al 1998] Y.Le Menach, S.Clénet, F.Piriou, Determination and utilization of the source field in 3D magnetostatic problems, IEEE Trans. Mag., vol. 34, pp. 2509-2512, 1998. [Le Menach 1999] Y. Le Menach, Contribution à la modélisation numérique tridimensionnelle des systèmes électrotechniques Thèse de doctorat de l'Université des Sciences et Technologies de Lille soutenue le 1 février 1999. [Le Menach et al 2000] Y. Le Menach, S. Clénet, F. Piriou. Numerical model to discretize source fields in the 3D finite element method. IEEE Trans. Mag, Vol. 34, No 4, 2000. [Le Menach 2012] Y. Le Menach, Contribution à la modélisation numérique des phénomènes électromagnétiques 3D en basse fréquence Rapport de synthèse en vue d'obtenir l'Habilitation à Diriger des Recherches de l'Université des Sciences et Technologies de Lille soutenue le 11 décembre 2012.

[Lepaul et al 1999]	S. Lepaul, J. K. Sykulski, C. S. Biddlecombe, A. P. Jay, J. Simkin <i>Coupling of motion and circuits with electromagnetic analysis</i> IEEE Trans. Magn., vol., n°35, pp 1602-1605, 1999.	
[Maréchal 1991]	Y. Maréchal Modélisation des phénomènes magnétostatiques avec terme de transport : Application aux ralentisseurs électromagné tiques, Thèse de Doctorat, INPG, février 1991.	
[Marrocco 1977]	A. Marrocco Analyse numérique des problèmes en électrotec niques, Ann. Sc. Math, Québec, vol. 1, pp. 271-296, 1977.	
[Marrone 2004]	M. Marrone. Properties of constitutive matrices for electrostal and magnetostatic problems. IEEE Trans. Mag., vol. 40, pp 104 1048, 2004.	
[Mayergoyz 1983]	I. D. Mayergoyz. A new approach to the calculation of three-dimensional skin effect problems. IEEE Trans. Mag., vol. 19, No 5, pp 2198-2200, 1983.	
[Miellou, Spiteri 1985]	J. C. Miellou, P. Spiteri, Un critère de convergence pour des méthodes générales de point fixe, 1985.	
[Moreau 2012]	O. Moreau <i>Note de principe de Code_Carmel3D</i> , note technique EDF R&D, H-R26-2011-02244-FR, avril 2012	
[Montier 2018]	L. Montier "Applications de méthodes de réduction de modèles aux problèmes d'électromagnétisme basse fréquence", Thèse L2EP, 2018.	
[Moses 1992]	A. Moses <i>Importance of rotational losses in rotating machines and transformers</i> Journal of Materials Engineering and Performance, vol. 1, no. 2, pp. 235–244, Mar. 1992.	
[Nakata et al 1988]	T. Nakata, N. Takahashi, K. Fujiwara and Y. Okada <i>Improvement of</i> $\mathbf{T} - \Omega$ <i>method for 3D eddy currents analysis</i> , IEEE Trans. Mag., vol. 24, no 1, pp. 274-277, 1988.	
[Nakata et al, 1988]	T. Nakata, N. Takahashi, K. Fujiwara, Y. Okada. A new potentiel formulation for 3D magnetostatic necessiting no field computation. IEEE Trans. Mag., vol. 24, No 1, pp. 274-277, 1988.	
[Nakata et al 1995]	T. Nakata, N. Takahashi, K. Fujiwara Summary of results for TEAM Workshop problem 13 (3-D nonlinear magnetostatic model) 14(2): pp. 91–101, 1995.	
[Nédélec 1992]	JC. Nédélec Notion sur les techniques d'éléments finis, Édition Springer, 1992	
[Pérez et al 1990]	J-P. Pérez, R. Carles, R. Fleckinger. <i>Électromagnétisme</i> , Édition Masson, 1990.	
[Perrin-Bit 1992]	R. Perrin-Bit, Modélisation des machines électriques tournantes par la méthode des éléments finis tridimensionnels : calcul des grandeurs magnétiques avec prise en compte du mouvement, Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique, Grenoble mars 1992.	
[Preston at al 1988]	T. W. Preston, A. B. J Reece, P. S. Sangha <i>Induction motor analysis by time-stepping techniques</i> IEEE Trans. Magn. vol. 24, n°1, pp 471-474, 1988.	
[Rapetti 2000]	F. Rapetti Approximation des équations de la magnétodynamique en domaine tournant par la méthode des éléments avec joints,	

Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, mai 2000.

[Rapetti et al 2000]

F. Rapetti, F. Bouillault, L. Santendrea, A. Buffa, Y. Maday, A. Razek *Calculation of Eddy currents with edge elements on non-matching grids in moving structures*, IEEE Trans. Magn., vol. 36, n°4, pp 1351-1355, 2000.

[Rapetti, Rousseau 2011]

F. Rapetti, G. Rousseaux *Implications of Galilean Electromagnetism in NumericalModeling*, ACES Journal, Vol. 26, n°. 9, pp. 784-791, September 2011.

[Razek et al 1982]

A. Razek, J. L. Coulomb, M. Féliachi, J. C. Sabonnadière Conception of an air gap element for dynamic analysis of the electromagnetic field of electric machine, IEEE Trans. Magn., vol. 18, n°2, pp 655-659, 1982.

[Ren 1994]

Z. Ren Comparison of different force calculation methods in 3D finite element modelling, I.E.E.E. Trans. on Magnetics, vol. 30, no.5, pp. 3471-3474, 1994.

[Ren 1996]

Z. Ren Auto-gauging of vector potential by iterative solver numerical evidence, Internationnal worksop on electric and magnetic fields, pp 119-124, Liège 1996

[Ren 1996b]

Z. Ren Influence of R.H.S on the convergence behaviour of curlcurl equation, IEEE Trans. Mag., vol 32, pp. 655-658, 1996.

[Ren et al 1990]

F. Bouillault, A. Razek, A. Bossavit, J-C. Vérité A new hybrid model using electric field formulation for 3-D eddy current problems, IEEE Trans. Mag, Vol. 26, No 2, pp 470-473, 1990.

[Ren et al 1992]

Z. Ren, M. Besbes, S. Boukhtache *Calculation of local magnetic forces in magnetized materials*, International Workshop on electric and magnetic fields, pp. 64.1-64.6, Liège 1992.

[Ren, Razek 1992]

Z. Ren, A. Razek On the magnetic forces calculation by equivalent source method, International Workshop on electric and magnetic fields, pp. 21.1-21.5, Liège 1992.

[Ren, Razek 1992]

Z. Ren, A. Razek Local force computation in deformable bodies using edge elements, I.E.E.E. Trans. on Magnetics, vol. 20, no.2, pp. 1212-1215, 1992

[Ren, Razek 1994]

Z. Ren, A. Razek A strong coupled model for analysing dynamic behaviours of non linear electromechanical systems, I.E.E.E. Trans. on Magnetics, vol. 30, no.5, pp. 3252-3255, 1994.

[Rodger et al 1990]

D. Rodger, H. C. Lai and P. J. Leonard *Coupled element for problems involving movement*, IEEE, Trans. Magn., vol 26, no2, pp548-550, March 1990.

[Sadowski et al 1992]

N. Sadowski, Y. Lefèvre, M. Lajoie-Mazenc, J.-P. A. Bastos *Sur le calcul des forces magnétiques*, Journal Physique III, France, pp. 859-870, 1992.

[Sadowski 1993]

N. Sadowski Contribution à la modélisation des machines électriques par la résolution simultanée des équations du champ et des équations du circuit électrique d'alimentation, Thèse de doctorat, I.N.P. Toulouse, décembre 1993.

[Swift et al, 2001]

G. Swift, D. A. Tziouvaras, P. McLaren, G. Alexander, D. Dawson, J. Esztergalyos, C. Fromen, M. Glinkowski, I. Hasenwinkle, M. Kezunovic, L. Kojovic, B. Kotheimer, R. Kuffel, J. Nordstrom, S. Zocholl, *Discussion of Mathematical models for current, voltage, and coupling capacitor voltage transformers and closure*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 16, no 4, pp. 827–828, 2001.

T. Tarhasaari, L. Kettunen, A. Bossavit. Some realizations of a discrete Hodge operator: a reinterpretation of finite element techniques. IEEE Trans. Mag, Vol. 35, No 3, pp 1494-1497, 1999.

[Tarhasaari et al 1999]

[Tittarelli 2016]	R. Tittarelli Estimateurs d'erreur a posteriori pour les équations de Maxwell en formulation temporelle et potentielle Thèse de Doctorat de l'Université des Sciences et Technologies de Lille soutenue le 27 septembre 2016.	
[Tonti 2000]	E. Tonti. Algebraic topology and computational electromagnetism. In International Worshop on Electric and Magnetic Fields, pp 20-21, 2000.	
[Tonti 2001a]	E. Tonti. A discrete formulation of field laws: The cell method. CMES, vol. 1, No 1, 2001.	
[Tonti 2001]	E. Tonti. Finite Formulation of Electromagnetic fields. In ICS Newsletter, vol. 8, No 1 pp 5-12, 2001.	
[Tsukerman 1992]	I. A. Tsukerman Overlapping finite elements for problems with movement, IEEE Trans. on Magn., vol. 28, n°5, pp 2247-2249,1992.	
[Vassent 1990]	E. Vassent Contribution à la modélisation des moteurs asynchrones par la méthode des éléments finis, Thèse de doctorat, I.N.P.G Grenoble, novembre 1990.	
[Vérité et al 2007]	Jean - Claude Vérité, Jean - Pierre Ducreux, Gérard Tanneau, Philippe Baraton, Bernard Paya Calcul de champ électromagnétique, Lavoisier, 2007.	
[Webb, Forghani 1989]	J.P.Webb and B.Forghani A single scalar potential method for 3D magnetostatics using edge elements, IEEE Trans. Mag., vol 25, no 5, pp. 4126-4128, 1989.	
[Weiss 1907]	P. Weiss L'hypothèse du champ moléculaire et la propriété ferro- magnétique 1907.	
[Ypma 1995]	T. J. Ypma Historical Development of the Newton-Raphson Method SIAM Review, 37(4): pp. 531–551, 1995	
[Ren et al 1996]	Z.Ren, "Influence of R.H.S on the convergence behaviour of curl-curl equation", in <i>IEEE Trans. Mag.</i> , vol. 32, pp 655-658, 1996	
[Dlotko et al 2011]	P. Dlotko et R. Specogna, "Efficient generalized source field computation for h-oriented magnetostatic formulations", in <i>Eur. Phys. J. Appl. Phys.</i> , 53, 20801, 2011	
[Le Menach et al 1998]	Y. Le Menach, S. Clénet et F. Piriou, "Determination and utilization of the source field in 3D magnetostatic problems", in <i>IEEE Trans. Mag.</i> , vol. 34, no. 5, sept. 1998	
[Golovanov et al 1999]	C. Golovanov, Y. Maréchal and G. Meunier, "A New Technique for Stranded Coil Treatment in a 3D Edge Element Based Formulation", in <i>IEEE Trans. Mag.</i> , vol. 35, no. 3, mai 1999	
[Badics et al 2007]	Z. Badics et Z. J. Cendes, "Source Field Modeling by Mesh Incidence Matrices",in $\it IEEE\ Trans.\ Mag.$, vol. 43, no. 4, avril 2007	

Sixième partie

Annexes

Annexe A

Documents de référence

Les documents ayant servi à l'élaboration de cette note de principes sont :

- 1 Thèse de doctorat d'Yvonnick Le Menach [Le Menach 1999];
- 2 Rapport interne EDF R&D de Natacha Bereux "code_Carmel Note de Principe", 1^{er} février 2008;
- 3 Rapport interne LAMEL, "Étude de calculs de champs électromagnétiques Qualification du code Carmel", février 2011;
- 4 Thèse de doctorat de Thomas Henneron [Henneron 2004];
- 5 Rapport de synthèse en vue d'obtenir l'Habilitation à Diriger des Recherches d'Yvonnick Le Menach [Le Menach 2012].
- 6 K. Beddek. Propagation d'incertitudes dans les modèles éléments finis en électromagnétisme Application au contrôle non destructif par courants de Foucault. Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologie de Lille, 2012.
- 7 R. Gaignaire. Contribution à la modélisation numérique en électromagnétisme statique stochastique. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, 2008.
- 8 H. Mac. Résolution numérique en électromagnétisme statique de problèmes aux incertitudes géométriques par la méthode de transformation : Application aux machines électriques. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, 2012.
- 9 R. Tittarelli Estimateurs d'erreur a posteriori pour les équations de Maxwell en formulation temporelle et potentielle, Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologie de Lille, 2016.
- 10 O. Moreau Note de principe de code_Carmel 3D, 2012
- 11 B. Goursaud Note de principe de Code Carmel3D version 2.5.0, 2015
- 12 L. Montier, B. Goursaud Nouveaux développements dans code_Carmel effectués dans le cadre de la thèse sur la réduction de modèles, note technique EDF R&D 6125-1717-2017-02298-FR, juillet 2017

Annexe B

L'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)

L'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) est une simplification des équations de Maxwell obtenue lorsque des sources sont lentement variables dans le temps. L'approximation ARQS porte aussi le nom de modèles des courants de Foucault ou modèle magnétodynamique. Pour bien comprendre cette approximation, deux approches sont détaillées ci-dessous.

B.1 Analyse des constantes de temps

Une étude mathématique du passage à la limite des équations de Maxwell vers le modèle approché est présenté dans [Ammari et al 2000]. Pour cette première approche, ce paragraphe suit la présentation de [Pérez et al 1990] (pp. 272-282).

L'approximation ARQS consiste à négliger le temps de propagation des phénomènes électriques τ_{em} dans le système étudié devant le temps caractéristique de variation de la source T_s . Pour une source de courant périodique, ce temps caractéristique est la période temporelle du courant.

Ainsi, dans le vide, une onde électromagnétique se propage à la vitesse de la lumière,

$$c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}.$$

Le temps de propagation entre deux points éloignés de 3 m est de :

$$\tau_{em} = \frac{3}{3 \cdot 10^8} = 10^{-8} \; \mathrm{s}$$

Le temps caractéristique pour une source de courant à 50 Hz est :

$$T_s = \frac{1}{50} = 2.10^{-2} \text{ s}$$

On a bien:

$$\tau_{em} << T_s$$

Annexe C

Condition de Jauge U.w

Soit un champ de vecteur \mathbf{V} défini par div $\mathbf{V} = 0$, on a alors \mathbf{V} qui dérive d'un potentiel vecteur \mathbf{U} tel que $\mathbf{rot}\mathbf{U} = \mathbf{V}$. Cependant si on définit \mathbf{U}_1 et \mathbf{U}_2 tels que leur rotationnel soient égal à \mathbf{V} , on a alors :

$$\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2 = grad\lambda \tag{C.1}$$

Cette relation montre que U est défini à un gradient près. Pour avoir l'unicité de la solution, il est donc nécessaire de fixer le potentiel scalaire λ .

Considérons maintenant un champ de vecteur \mathbf{w} dont les lignes de champs ne se referment pas et sont telles qu'elles relient tous les points du domaine \mathcal{D} . Posons la condition :

$$\mathbf{U}_{1} \cdot \mathbf{w} = f(r) \mathbf{U}_{2} \cdot \mathbf{w} = f(r)$$
 (C.2)

Ces deux dernières relations montrent que :

$$grad\lambda \cdot \mathbf{w} = 0$$
 (C.3)

Cette condition revient à fixer λ . En effet si on calcule la circulation le long du chemin $\Gamma_{P\to Q}$ qui s'écrit :

$$\Gamma_{P \to Q} = \int_{P}^{Q} grad\lambda \cdot \mathbf{dl} = \lambda_{Q} - \lambda_{P}$$
 (C.4)

comme le champ \mathbf{w} peut relier tous les points du maillage, il est possible de choisir la circulation $\Gamma_{P \to Q}$ le long de \mathbf{w} . Or l'équation C.3 entraı̂ne que cette circulation est nulle donc, $\Gamma_{P \to Q}$ est nulle ce qui impose $\lambda_P = \lambda_Q$ et par conséquent fixe λ et jauge \mathbf{U} .

Annexe D

Intégration des éléments Overlapping dans code_Carmel

Ce chapitre vise à expliquer l'intégration des Eléments Overlapping (ou Overéléments) dans code_Carmel. La méthode Overlapping[Demenko et al 2006][Tsukerman 1992] permet de prendre en compte le mouvement pour n'importe quelle rotation, et aparaît de ce point vue en tant qu'une généralisation du pas bloqué. La méthode implémentée ici dérive des travaux réalisés par Xiaodong Shi[Demenko et al 2006], et l'étend aux fonctions d'arêtes afin d'être compatible avec la formulation en \boldsymbol{A} .

D.1 Présentation de l'Overélément

L'Overélément implémenté dans code_Carmel est une extension de l'hexaèdre. Il permet de prendre en compte le mouvement dans un domaine non maillé, sans avoir à remailler au cours du mouvement.

D.1.1 Élément de référence

L'élément de référence Overlapping est présenté sur la figure D.1. A la différence de l'hexaèdre, la coordonnée de ses sommets n'est plus 1 ou -1 selon x, mais -a (S_1, S_5) , b (S_2, S_6) , c (S_3, S_7) ou enfin d (S_4, S_8) , avec $a, b, c, d \ge 1$. La zone d'intégration de l'Overélément est identique à celle de l'hexaèdre : $(x, y, z) \in [-1, 1]^3$, représentée par la surface hexaédrique sur la figure D.1.

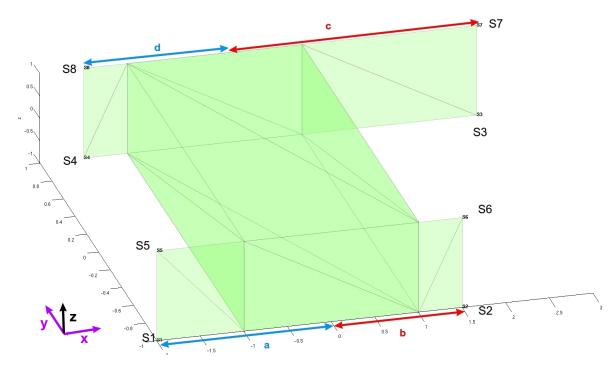


Figure D.1 – Pyramide de référence

En pratique cependant, on utilisera dans le code deux cas particuliers de cet élément général, l'Overélément gauche (b=d=1) et l'Overélément droit (a=c=1) comme montré sur la figure D.2.

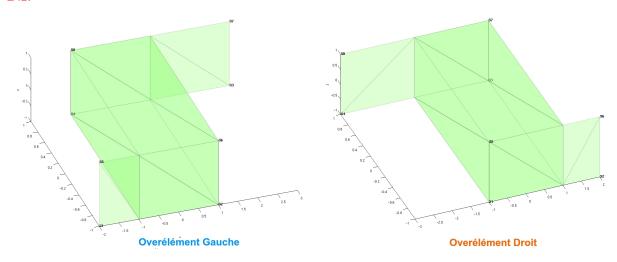


Figure D.2 – Pyramide de référence

Les coordonnées des sommets sont les suivantes :

$$S_1 = \begin{pmatrix} -a \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} b \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} c \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad S_4 = \begin{pmatrix} -d \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$S_5 = \begin{pmatrix} -a \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S_6 = \begin{pmatrix} b \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S_7 = \begin{pmatrix} c \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S_8 = \begin{pmatrix} -d \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nous allons maintenant présenter les fonctions de forme utilisées.

D.1.2 Fonctions de formes nodales

Les fonctions nodales sont utilisées pour discrétiser les éléments appartenant à $(H^1(\Omega))^3$. La fonction nodale associée à un nœud vaut 1 sur celui-ci, et 0 sur tous les autres :

$$\int_{\{S_i\}} w_i^n \cdot \delta_{n_j} = \delta_i^j \tag{D.1}$$

où δ_{n_j} est la distribution de Dirac associée au noeud j, et δ_i^j , le symbole de Kronecker. Les 5 fonctions nodales sont les suivantes :

$$\begin{split} w_1^n(x,y,z) &= \frac{(b-x)(1-y)(1-z)}{4(a+b)} \\ w_2^n(x,y,z) &= \frac{(a+x)(1-y)(1-z)}{4(a+b)} \\ w_3^n(x,y,z) &= \frac{(d+x)(1+y)(1-z)}{4(c+d)} \\ w_4^n(x,y,z) &= \frac{(c-x)(1+y)(1-z)}{4(c+d)} \\ w_5^n(x,y,z) &= \frac{(b-x)(1-y)(1+z)}{4(a+b)} \\ w_6^n(x,y,z) &= \frac{(a+x)(1-y)(1+z)}{4(a+b)} \\ w_7^n(x,y,z) &= \frac{(d+x)(1+y)(1+z)}{4(c+d)} \\ w_8^n(x,y,z) &= \frac{(c-x)(1+y)(1+z)}{4(c+d)} \end{split}$$

Le lecteur pourra vérifier qu'elles forment bien une partition de l'unité sur l'élément.

D.1.3 Fonctions de formes d'arête

Les fonctions "d'arête" sont utilisées pour discrétiser les éléments appartenant à $H(rot, \Omega)$. Ces fonctions sont dites d'arête car leur circulation est égale à 1 sur l'arête à laquelle elles sont associées, et 0 sinon. Elles vérifient ainsi la propriété suivante :

$$\int_{e_j} \boldsymbol{w}_i^e \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{l} = \delta_{ij} \tag{D.2}$$

Elles peuvent être calculées avec la formule de référence [Geuzaine 2001]. Cependant, avec cette approche, il faut utiliser les fonctions nodales de l'hexaèdre ou de l'Overélément selon que l'on calcule les fonctions d'arête parallèles à (Ox), (Oy) ou (Oz). Il est donc plus simple de les "intuiter" à partir de celles de l'hexaèdre.

Les expressions des fonctions associées à l'arête \boldsymbol{w}_{ij}^e , orientée de i vers j sont finalement :

- pour les arrêtes selon (Ox):

$$\boldsymbol{w}_{12}^{e} = \begin{pmatrix} \frac{(1-y)(1-z)}{4(a+b)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_{56}^{e} = \begin{pmatrix} \frac{(1-y)(1+z)}{4(a+b)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_{43}^{e} = \begin{pmatrix} \frac{(1+y)(1-z)}{4(c+d)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_{87}^{e} = \begin{pmatrix} \frac{(1+y)(1+z)}{4(c+d)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- pour les arrêtes selon (Oy):

$$\boldsymbol{w}_{14}^{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{(1-x)(1-z)}{8} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_{23}^{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{(1+x)(1-z)}{8} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_{58}^{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{(1-x)(1+z)}{8} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_{67}^{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{(1+x)(1+z)}{8} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- pour les arrêtes selon (Oz):

$$\boldsymbol{w}_{15}^{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(1-y)(b-x)}{4(a+b)} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_{26}^{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(1-y)(a+x)}{4(a+b)} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_{37}^{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(1+y)(d+x)}{4(c+d)} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_{48}^{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{(1+y)(c-x)}{4(c+d)} \end{pmatrix}$$

D.1.4 Points de Gauss

Les points de Gauss utilisés sont issus de ceux de l'hexaèdre de code_Aster, à 8 points. (Ceux de code_Carmel à 6 points semblent ne pas donner de résultats très précis...)

(D.4)

Les 8 points de Gauss utilisés sont les suivants :

$$\mathbf{p}_{1} = \begin{pmatrix} a1 \\ a1 \\ a1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_{2} = \begin{pmatrix} a1 \\ a1 \\ -a1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_{3} = \begin{pmatrix} a1 \\ -a1 \\ a1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_{4} = \begin{pmatrix} a1 \\ -a1 \\ -a1 \end{pmatrix}$$
(D.3)

$$\boldsymbol{p}_{5} = \begin{pmatrix} -a1\\a1\\a1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_{6} = \begin{pmatrix} -a1\\a1\\-a1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_{7} = \begin{pmatrix} -a1\\-a1\\a1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_{8} = \begin{pmatrix} -a1\\-a1\\-a1 \end{pmatrix}$$
(D.5)

avec:

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Les poids utilisés sont identiques, et sont égaux à :

$$w_1 = 1$$

On peut vérifier que la somme des 8 poids est bien égale à 8, l'aire de l'hexaèdre sur lequel est réalisée l'intégration numérique.

264ANNEXE D. INTÉGRATION DES ÉLÉMENTS OVERLAPPING DANS CODE_CARMEL

Annexe E

Prise en compte de la non linéarité

Afin de prendre en compte les matériaux non-linéaires avec le modèle élément fini, la loi de comportement ainsi que le calcul explicite de la jacobienne est explicitée.

E.1 Loi de comportement non linéaire

Afin de modéliser le caractère non linéaire du matériau, une loi de type Marrocco est utilisée :

$$\nu\left(\|\mathbf{B}\|\right) = \frac{1}{\mu_0} \left(\epsilon_m + \frac{(c_m - \epsilon_m) \|\mathbf{B}\|^{2\alpha}}{\|\mathbf{B}\|^{2\alpha} + \tau_m}\right)$$
 (E.1)

où ϵ_m , τ_m et α sont des constantes issues de l'expérience.

Cette modélisation de la non-linéarité possède notamment les trois propriétés suivantes qui permettent d'établir l'existence et l'unicité du problème magnétostatique non linéaire :

$$\exists \nu_0 / \forall z, \nu_z \ge \nu_0 \tag{E.2}$$

$$\exists \nu_{\infty} / \forall z, \frac{d\nu_{(z)}}{dz} \le \nu_{\infty}$$
 (E.3)

$$\exists M / \forall z, \frac{d\nu_{(z)}}{dz}z + \nu_{(z)} \le M \tag{E.4}$$

E.2 Calcul de la Jacobiennne

On rappelle l'expression du vecteur résidu associé au système générique d'équations au $k^{\text{\`e}me}$ pas de temps :

$$\mathbf{R}\left(\mathbf{X}_{j}^{k}\right) = \left(\frac{\mathbf{K}}{\tau} + \mathbf{M}_{\theta}\left(\theta^{k}\right) + \mathbf{M}\left(\mathbf{X}_{j}^{k}\right)\right) \mathbf{X}_{j}^{k} - \mathbf{C}\mathbf{U}^{k} - \frac{\mathbf{K}}{\tau}\mathbf{X}^{k-1}$$
(E.5)

La matrice jacobienne ${f J}$ associée au résidu s'écrit alors :

$$\mathbf{J} = \frac{\mathbf{K}}{\tau} + \mathbf{M}_{\theta} \left(\theta^{k} \right) + \overline{\mathbf{J}} \left(\mathbf{X}_{j}^{k} \right)$$
 (E.6)

avec la partie non linéaire de la jacobienne définie par :

$$\overline{\mathbf{J}} = \frac{\partial \left(\mathbf{M} \left(\mathbf{X}_{j}^{k} \right) \mathbf{X}_{j}^{k} \right)}{\partial \mathbf{X}_{j}^{k}}$$
 (E.7)

Cette matrice de $\mathbb{R}^{N\times N}$ représente les comportements non linéaires des matériaux ferromagnétiques. Dans notre modèle, les propriétés de ces matériaux varient en effet avec $\|\mathbf{B}\|$. Or, puisque $\mathbf{B} = \mathbf{rot} \, \mathbf{A}$, seule l'inconnue \mathbf{A} génère une non-linéarité (et donc les inconnues ϕ ou les courants i_k , $k=1,...,|\nu|$ ne sont pas *explicitement* responsables de ce comportement non linéaire). Ainsi, et de façon non réductrice, nous présentons dans cette annexe le calcul de la partie non linéaire de la matrice jacobienne sur une problème magnétostatique sans couplage circuit.

La méthodes des éléments finis conduit aux N équations suivantes E_i , i=1,...,N:

$$E_{i}: \int_{\mathcal{D}} \left(\mathbf{H} \left(\mathbf{A} \right) . \mathbf{rot} \mathbf{w}_{i}^{1} \right) = \int_{\mathcal{D}} \left(\mathbf{J}_{s} . \mathbf{w}_{i}^{1} \right)$$
 (E.8)

La jacobienne associée aux équations E_i a pour coefficients :

$$\left(\overline{\mathbf{J}}\right)_{i,j}(\mathbf{A}) = \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{A})}{\partial A_{j}}.\mathbf{rotw}_{i}^{1}\right) d\mathcal{D}$$
 (E.9)

Or, on a les relations suivantes :

$$\mathbf{H}(\mathbf{A}) = \nu(\|\mathbf{B}\|) \mathbf{B} \tag{E.10}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot} \,\mathbf{A} \tag{E.11}$$

D'où:

$$\frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{A})}{\partial A_{j}} = \frac{\partial \nu (\|\mathbf{B}\|)}{\partial A_{j}} \mathbf{B} + \nu (\|\mathbf{B}\|) \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial A_{j}}$$
 (E.12)

Dans cette somme de deux termes, le second est simple à exprimer. En effet, en sachant que $\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}$ et, en utilisant la décomposition éléments finis $\mathbf{A} = \sum_{l} A_{l} \mathbf{w}_{l}^{1}$, on a :

$$\nu\left(\|\mathbf{B}\|\right) \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial A_{i}} = \nu\left(\|\mathbf{B}\|\right) \mathbf{rot} \mathbf{w}_{j}^{1} \tag{E.13}$$

Le premier terme est quant à lui exprimé en utilisant la dérivation composée :

$$\mathbf{B} \frac{\partial \nu (\|\mathbf{B}\|)}{\partial A_j} = \mathbf{B} \frac{\partial \nu (\|\mathbf{B}\|)}{\partial \|\mathbf{B}\|} \cdot \frac{\partial \|\mathbf{B}\|}{\partial \|\mathbf{B}\|^2} \cdot \frac{\partial \|\mathbf{B}\|^2}{\partial A_j}$$
(E.14)

Alors:

$$\mathbf{B} \frac{\partial \nu (\|\mathbf{B}\|)}{\partial A_j} = \mathbf{B} \nu' (\|\mathbf{B}\|) \cdot \frac{1}{2\|\mathbf{B}\|} \cdot \left(\frac{\partial \|\mathbf{B}\|^2}{\partial B_x} \frac{\partial B_x}{\partial A_j} + \frac{\partial \|\mathbf{B}\|^2}{\partial B_y} \frac{\partial B_y}{\partial A_j} + \frac{\partial \|\mathbf{B}\|^2}{\partial B_z} \frac{\partial B_z}{\partial A_j} \right)$$
(E.15)

Soit encore:

$$\mathbf{B} \frac{\partial \nu \left(\| \mathbf{B} \| \right)}{\partial A_{j}} = \frac{\nu' \left(\| \mathbf{B} \| \right) \mathbf{B}}{2 \| \mathbf{B} \|} \left(2B_{x} \left(\mathbf{rot} \mathbf{w}_{j}^{1} \right)_{x} \mathbf{e}_{x} + 2B_{y} \left(\mathbf{rot} \mathbf{w}_{j}^{1} \right)_{y} \mathbf{e}_{y} + 2B_{z} \left(\mathbf{rot} \mathbf{w}_{j}^{1} \right)_{z} \mathbf{e}_{z} \right)$$
(E.16)

Et, enfin:

$$\mathbf{B} \frac{\partial \nu (\|\mathbf{B}\|)}{\partial A_{i}} = \frac{\nu' (\|\mathbf{B}\|)}{\|\mathbf{B}\|} (\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}) .\mathbf{rot} \, \mathbf{w}_{j}^{1}$$
(E.17)

où le produit tensoriel de B par lui même est :

$$\mathbf{B} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_x B_x & B_x B_y & B_x B_z \\ B_y B_x & B_y B_y & B_y B_z \\ B_z B_x & B_z B_y & B_z B_z \end{pmatrix}$$
(E.18)

E.3. DÉCOMPOSITION DES OPÉRATEURS EN PARTIE LINÉAIRE ET NON LINÉAIRE267

Finalement, en définissant la matrice de réluctivité non linéaire $\overline{\nu}$ par :

$$\overline{\boldsymbol{\nu}} = \nu \left(\| \mathbf{B} \| \right) \, \mathbf{I}_3 + \frac{\nu' \left(\| \mathbf{B} \| \right)}{\| \mathbf{B} \|} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B}$$
 (E.19)

On a comme expression finale de la jacobienne :

$$\left(\overline{\mathbf{J}}\right)_{i,j}(\mathbf{A}) = \int_{\mathcal{D}} \left(\overline{\nu} \mathbf{rot} \mathbf{w}_{j}^{1}.\mathbf{rot} \mathbf{w}_{i}^{1}\right) d\mathcal{D}$$
(E.20)

E.3 Décomposition des opérateurs en partie linéaire et non linéaire

Bien que cette section soit triviale, il convient de la rappeler car elle permet un gain de temps considérable dans l'assemblage du modèle complet.

Ainsi il est souvent plus efficace de séparer la partie linéaire de la matrice $\mathbf{M}(.)$ de la partie non linéaire. On décompose alors $\mathbf{M}(.)$ en :

$$\mathbf{M}\left(.\right) = \mathbf{M}_{lin} + \mathbf{M}_{nl}\left(.\right) \tag{E.21}$$

où \mathbf{M}_{lin} et \mathbf{M}_{nl} (.) sont deux matrices carrées de $\mathbb{R}^{N\times N}$. \mathbf{M}_{lin} correspond notamment aux domaines où la perméabilité magnétique est constante. Ainsi, la matrice non linéaire \mathbf{M}_{nl} (.) est issue de l'assemblage des éléments situés dans les domaines ferromagnétiques non linéaires.

De même, on peut décomposer la jacobienne en une partie linéaire ${\bf J}_{lin}$ et une autre non linéaire ${\bf J}_{nl}$:

$$\mathbf{J}\left(.\right) = \mathbf{J}_{lin} + \mathbf{J}_{nl}\left(.\right) \tag{E.22}$$

avec les deux matrices \mathbf{J}_{lin} et \mathbf{J}_{nl} définies par :

$$\mathbf{J}_{lin} = \frac{\mathbf{K}}{\tau} + \mathbf{M}_{\theta} \left(\theta^{k} \right) + \mathbf{M}_{lin} \tag{E.23}$$

et:

$$\mathbf{J}_{nl}\left(\mathbf{X}_{j}^{k}\right) = \frac{\partial\left(\mathbf{M}_{nl}\left(\mathbf{X}_{j}^{k}\right) \mathbf{X}_{j}^{k}\right)}{\partial \mathbf{X}_{j}^{k}}$$
(E.24)

$$= \frac{\partial \left(\mathbf{M}_{nl}\left(\mathbf{X}_{j}^{k}\right)\right)}{\partial \mathbf{X}_{j}^{k}} \mathbf{X}_{j}^{k} + \mathbf{M}_{nl}\left(\mathbf{X}_{j}^{k}\right)$$
(E.25)

Annexe F

Modèle discret à partir des matrices d'incidence

F.1 Opérateur différentiels discrets

En utilisant la notion d'incidence, des opérateurs différentiels "discrets" peuvent être définis [Bossavit 1993], [Tonti 2000], [Clemens, Weiland 1987]. Il s'agit d'opérateurs matriciels dont la construction est basée sur les connexions entre les différentes entités géométriques que sont les noeuds, les arêtes, les facettes et les volumes. Dans la suite, un couple de tétraèdres est utilisé pour illustrer les développements concernant les opérateurs différentiels discrets (cf. figure F.1). L'exemple traité comporte 5 noeuds, 9 arêtes et 7 facettes.

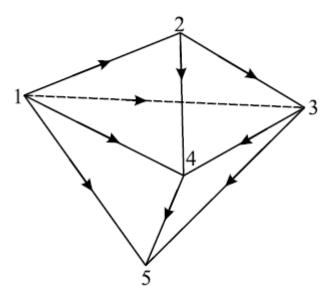


Figure F.1 – Couple de tétraèdres utilisé pour illustrer la définition des matrices d'incidence

F.1.1 Incidence noeud-arête

Les arêtes sont des éléments géométriques qui sont orientés de manière arbitraire. On peut choisir par exemple, une orientation du noeud ayant l'indice le plus petit à celui ayant l'indice le plus grand. La numérotation des arêtes en fonction des noeuds, pour l'exemple de la figure F.1, est donnée par le tableau F.1.

Tableau F.1 – Numérotation des arêtes

Par définition, l'incidence g_{an} d'un noeud n sur une arête a est égale à -1 si le noeud n est l'origine de l'arête a, 1 si n est l'extrémité de a ou 0 si n n'appartient pas à a. On définit ainsi la matrice incidence \mathbf{G} de dimension $n_a \times n_n$ des coefficients $(g_{an})_{(1 \le a \le n_a \text{ et } 1 \le n \le n_n)}$. Pour l'exemple considéré, on obtient la matrice \mathbf{G} suivante :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(F.1)$$

Considérons maintenant deux fonctions, l'une scalaire, notée u_n et l'autre vectorielle, notée \mathbf{u}_a , appartenant respectivement à W^0 et \mathbf{W}^1 , telles que $\mathbf{u}_a = \mathbf{grad}u_n$.

on pose:

$$u_n = \mathbf{U}_n^t \mathbf{W}_n = \sum u_n w_n \tag{F.2}$$

et

$$\mathbf{u}_a = \mathbf{U}_a^t \mathbf{W}_a = \sum u_a \mathbf{w}_a \tag{F.3}$$

Alors, on peut montrer que:

$$\mathbf{U}_a = \mathbf{G}\mathbf{U}_n \tag{F.4}$$

avec $\mathbf{U}_a \in \mathcal{W}^1$ et $\mathbf{U}_n \in \mathcal{W}^0$.

La matrice ${f G}$ peut donc être considérée comme l'opérateur discret du gradient.

F.1.2 Incidence arête-facette

Les facettes sont également des éléments géométriques orientés. L'orientation d'une facette peut être donnée, par convention, par le sens des noeuds croissants dans le cas de facettes triangulaires. Cette convention ne s'applique qu'avec un nombre de noeuds par facette inférieur ou égal à 3. La numérotation des facettes en fonction des noeuds est donnée dans le tableau F.2.

Tableau F.2 – Numérotation des facettes

L'incidence r_{fa} d'une arête a par rapport à une facette f est égale à 1 si, en parcourant la frontière de la facette dans le sens positif, l'arête a est parcourue dans son sens positif, à -1 si le sens de a est opposé et à 0 si a n'appartient pas à f. A l'aide des coefficients $(r_{fa})_{(1 \le f \le n_f \text{ et } 1 \le a \le n_a)}$, on définit une matrice \mathbf{R} de dimension $n_f \times n_a$. Pour notre exemple, cette matrice est égale à :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
 (F.5)

Considérons maintenant une fonction vectorielle, notée \mathbf{u}_f , appartenant à \mathbf{W}^2 , tel que $\mathbf{u}_f =$ \mathbf{rotu}_a . On pose :

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{U}_f^t \mathbf{W}_f = \sum u_f \mathbf{w}_f \tag{F.6}$$

On peut montrer que:

$$\mathbf{U}_f = \mathbf{R}\mathbf{U}_a \tag{F.7}$$

avec $\mathbf{U}_f \in \mathcal{W}^2$ et donc \mathbf{R} est l'opérateur discret du rotationnel.

F.1.3 Incidence facette-élément

La numérotation des éléments en fonction des noeuds pour l'exemple de la figure F.1 est donnée par le tableau F.3.

éléments
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \text{noeuds} & 1,2,3,4 & 1,3,4,5 \end{vmatrix}$$

Tableau F.3 - Numérotation des éléments

L'incidence d_{ef} d'une facette f sur un élément e est égale à 1 ou -1 selon l'orientation de la normale à la facette ou 0 si f n'appartient pas à e. On peut définir ainsi la matrice $\mathbf D$ des coefficients $(d_{ef})_{(1 \leq e \leq n_e \text{ et } 1 \leq f \leq n_f)}$. Pour l'exemple traité, la matrice d'incidence D de dimension $n_e \times n_f$ est alors égale à :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 (F.8)

Pour une fonction scalaire \mathbf{u}_e appartenant à \mathbf{W}^3 et définie telle que $\mathbf{u}_e = div\mathbf{u}_f$. On peut montrer que :

$$\mathbf{U}_e = \mathbf{D}\mathbf{U}_f \tag{F.9}$$

avec $\mathbf{U}_e \in \mathcal{W}^3$ et **D** l'opérateur discret de la divergence.

F.1.4 Propriétés

Les opérateurs discrets possèdent des propriétés similaires à celles des opérateurs différentiels du domaine continu [Bossavit 1993]. Dans le cas d'un domaine contractile, les relations 5.4 restent valables sur les espaces W^i $(i \in \{0, 1, 2, 3\})$, celles-ci s'écrivent :

$$Ker\left(\mathbf{R}\left(\mathcal{W}^{1}\right)\right) = Im\left(\mathbf{G}\left(\mathcal{W}^{0}\right)\right)$$
 (F.10)

$$Ker\left(\mathbf{R}\left(\mathcal{W}^{1}\right)\right) = Im\left(\mathbf{G}\left(\mathcal{W}^{0}\right)\right)$$
 (F.10)
 $Ker\left(\mathbf{D}\left(\mathcal{W}^{2}\right)\right) = Im\left(\mathbf{R}\left(\mathcal{W}^{1}\right)\right)$ (F.11)

On a alors $\mathbf{DR} = \mathbf{0}$, cette propriété reste vraie même si \mathbf{D} n'est pas contractile. Inversement, si \mathbf{U}_f appartenant à \mathcal{W}^2 est à divergence nulle, alors il existe un vecteur \mathbf{U}_a dans \mathcal{W}^1 tel que $\mathbf{U}_f = \mathbf{R}\mathbf{U}_a$.

Remarque F.1.1 Du point de vue pratique, une méthode basée sur une technique d'arbre peut être utilisée pour déterminer le vecteur \mathbf{U}_a connaissant le vecteur \mathbf{U}_f (cf. annexe \mathbf{G}). De la même manière, si le rotationnel de \mathbf{U}_a est nul, il existe un vecteur \mathbf{U}_n dans \mathcal{W}^0 tel que $\mathbf{U}_a = \mathbf{G}\mathbf{U}_n$ et on a également $\mathbf{R}\mathbf{G}\mathbf{U}_n = 0$.

On peut maintenant proposer une écriture des équations de Maxwell dans le domaine discret. Ainsi, d'après ce qui précède, les équations 1.3 et 1.4 peuvent êtres écrites sous la forme :

$$\mathbf{RE}_a = -\frac{\partial \mathbf{B}_f}{\partial t} \tag{F.12}$$

$$\mathbf{DB}_f = 0 \tag{F.13}$$

avec \mathbf{E}_a une fonction de $\mathcal{W}^1 \times [0,T]$ (les coefficients du vecteur \mathbf{E}_a sont des fonctions scalaires dépendantes du temps qui représentent les circulations du champ électrique sur les arêtes du maillage) et \mathbf{B}_f une fonction de $\mathcal{W}^2 \times [0,T]$ (les coefficients du vecteur \mathbf{B}_f sont des fonctions scalaires dépendantes du temps qui représentent le flux de l'induction magnétique à travers les facettes du maillage).

F.2 Maillage dual

Il n'est pas aisé d'obtenir simultanément la vérification de toutes les équations de Maxwell sur un même maillage. Aussi, il peut être utile, comme on le verra par la suite, d'introduire un second maillage dit dual et noté \tilde{M} que l'on construit à partir du maillage M que l'on qualifiera de primal [Bossavit, Kettunen 2000], [Tonti 2001].

Dans la suite, nous allons donc développer la construction du maillage dual à partir du maillage primal. Ensuite, nous déclinerons quelques propriétés de ce couple de maillages en particulier concernant les opérateurs discrets introduits précédemment.

F.2.1 Définitions

A chaque entité géométrique du maillage primal on fait correspondre une entité géométrique du maillage dual : à un noeud primal n de M, on associe un élément dual \tilde{e} de \tilde{M} , à une arête primal a une facette duale \tilde{f} , à une facette f une arête \tilde{a} et à un élément e un noeud \tilde{n} .

Chaque arête a de M ne doit traverser qu'une seule facette \tilde{f} de \tilde{M} et vice versa et chaque noeud n de M est placé à l'intérieur d'un élément \tilde{e} de \tilde{M} et inversement.

L'orientation de chaque entité de \tilde{M} est déduite de l'orientation des entités primales. Par exemple, l'application de la règle de la main droite permet de déduire l'orientation d'une facette \tilde{f} à partir de l'orientation de l'arête a. L'illustration de ces orientations est donnée par les figures F.2 et F.3.

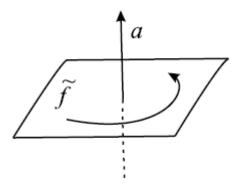


Figure F.2 – Orientation d'une facette \tilde{f} à partir de l'orientation d'une arête a

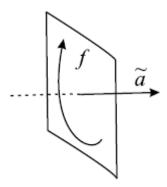


Figure F.3 – Orientation d'une arête \tilde{a} à partir de l'orientation d'une facette f

La définition précédente ne donne que le nombre d'entités géométriques duales et leurs connectivités. Pour définir complètement le maillage \tilde{M} , il est nécessaire de positionner les noeuds, les arêtes, les facettes et les éléments. Différentes techniques peuvent être alors utilisées. Dans la littérature, nous trouvons des maillages duaux barycentriques ou Delaunay-Voronoi. Les maillages duaux barycentriques se basent sur le barycentre de chaque entité du maillage primal, une arête \tilde{a} traverse une facette f en son barycentre et un noeud dual se situe au barycentre d'un élément primal, et inversement. Pour les maillages duaux Delaunay-Voronoi, les arêtes duales traversent les facettes primales perpendiculairement en leurs milieux. Pour illustrer ces deux types de maillage dual, un exemple 2D est donné par les figures $\mathbf{F}.4$ et $\mathbf{F}.5$.

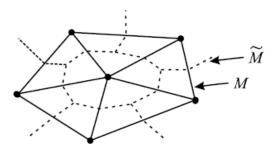


Figure F.4 – Maillage dual barycentrique

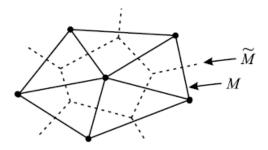


Figure F.5 – Maillage dual Delaunay-Voronoi

Remarque F.2.1 Il est à noter que les éléments générés pour un maillage dual sont des polyèdres qui peuvent être de formes complexes surtout avec un maillage tétraèdrique. Un cas particulier est

un maillage formé d'hexaèdres réguliers qui conduit à un maillage dual également hexaèdrique. Cette propriété a été mise à profit dans la méthode d'intégration finie. Dans le cas de la méthode des éléments finis, le maillage dual est implicite et donc non construit, celui-ci s'apparente à un maillage dual barycentrique. Cet aspect sera plus détaillé par la suite.

F.2.2 **Propriétés**

Comme pour le maillage primal, une fonction d'interpolation est associée à chaque entité duale. Des espaces discrets sont également générés par ces fonctions. On a alors \tilde{W}^0 , $\tilde{\mathbf{W}}^1$, $\tilde{\mathbf{W}}^2$ et \tilde{W}^3 les espaces générés respectivement par les fonctions nodales, d'arête, de facette et de volume du maillage dual et \tilde{W}^0 , \tilde{W}^1 , \tilde{W}^2 et \tilde{W}^3 les espaces générés par les degrés de liberté associés aux noeuds, arêtes, facettes et éléments duaux. Ces espaces ont les mêmes propriétés que ceux définis par le maillage primal.

Des matrices d'incidence sont également introduites par les différentes interconnexions des entités duales. On notera $\tilde{\mathbf{G}}$, $\tilde{\mathbf{R}}$ et $\tilde{\mathbf{D}}$ respectivement les opérateurs différentiels discrets du gradient, du rotationnel et de la divergence. De même, les propriétés des opérateurs discrets F.10 et F.11 restent valables sur le maillage dual.

Comme l'orientation des entités duales est déduite de l'orientation des entités primales, des propriétés entre les opérateurs discrets de M et M peuvent être démontrées, on a alors :

$$\mathbf{G} = -\tilde{\mathbf{D}}^{t}$$

$$\mathbf{R} = \tilde{\mathbf{R}}^{t}$$

$$\mathbf{D} = -\tilde{\mathbf{G}}^{t}$$

$$(F.14)$$

$$(F.15)$$

$$\mathbf{R} = \tilde{\mathbf{R}}^t \tag{F.15}$$

$$\mathbf{D} = -\mathbf{G}^t \tag{F.16}$$

Équations de Maxwell discrètes F.3

Étant donné que E et B sont discrétisés sur le maillage primal, dans la suite, nous discrétisons le champ magnétique ${\bf H}$ et la densité de courant ${\bf J}$ sur le maillage dual. Ce choix est arbitraire d'autant plus que le maillage dual de \tilde{M} est le maillage primal M lui même. Une inversion peut donc aisément être effectuée. On définit alors ${f B}_f$ les degrés de liberté associés aux flux de ${f B}$ à travers toutes les facettes de M, \mathbf{E}_a les degrés de liberté associés aux circulations de \mathbf{E} sur toutes les arêtes de M, $\tilde{\mathbf{H}}_a$ les degrés de liberté associés aux circulations de \mathbf{H} sur toutes les arêtes de \tilde{M} et $\tilde{\mathbf{J}}_f$ les degrés de liberté associés aux flux de \mathbf{J} à travers toutes les facettes de \tilde{M} . En utilisant les opérateurs discrets des deux maillages, les équations de Maxwell s'écrivent sous la forme :

$$\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{H}}_a = \tilde{\mathbf{J}}_a \tag{F.17}$$

$$\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{H}}_{a} = \tilde{\mathbf{J}}_{a} \tag{F.17}$$

$$\mathbf{R}\mathbf{E}_{a} = -\frac{\partial \mathbf{B}_{f}}{\partial t} \tag{F.18}$$

$$\mathbf{D}\mathbf{B}_{f} = \tag{F.19}$$

$$\mathbf{DB}_f = (F.19)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{J}}_f = 0 \tag{F.20}$$

En ce qui concerne les conditions limites, celles-ci sont imposées sur les suites d'espaces discrets des maillages primal et dual en fonction des champs discrétisés. Dans notre cas, l'induction magnétique est projetée sur le maillage primal, par conséquent, la condition de type Γ_B est associée à la suite d'espace de M. On définit ainsi les espaces \mathcal{W}_B^i par analogie avec les espaces W_B^i, W_B^2 est alors un sous espace de \mathcal{W}^2 regroupant l'ensemble des vecteurs dont les coefficients correspondant aux facettes de Γ_B sont nuls. En effet, tout vecteur de \mathbf{W}_B^2 conduit bien a un champ discret \mathbf{U}_f de \mathcal{W}_B^2 à flux nul à travers Γ_B . De la même manière, sur la suite d'espaces discrets du maillage dual est associée la condition limite de type Γ_H . En introduisant la projection des champs et des potentiels dans les espaces discrets, nous obtenons :

— pour le maillage primal :

— pour le maillage dual :

F.4 Discrétisation des lois de comportement

La discrétisation des équations de Maxwell étant établie, il nous reste maintenant à discrétiser les lois de comportement. Dans le domaine continu, nous avons des relations "locales". En effet, si on connaît ${\bf H}$ en un point d'un matériau ferromagnétique doux, on peut calculer ${\bf B}$ en ce point connaissant la perméabilité μ . Dans le domaine discret, les champs ne sont pas donnés localement mais plutôt globalement en terme de circulation ou de flux le long d'un nombre fini d'arêtes et de facettes, il faut donc réécrire les lois de comportement connues dans le domaine continu dans le domaine discret [Bossavit, Kettunen 2000], [Tonti 2001a], [Marrone 2004], [Alotto, Perugia 2004], [Tarhasaari et al 1999]. Ainsi, il faut trouver des relations qui lient les différentes grandeurs magnétiques et électriques discrétisées : $\tilde{{\bf H}}_a$ avec $\tilde{{\bf B}}_f$ et ${\bf E}_a$ avec $\tilde{{\bf J}}_f$.

Dans la bibliographie, plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour obtenir ces relations. A titre d'exemple, nous allons déterminer une loi de comportement "discrète" possible liant $\tilde{\mathbf{H}}_a$ et \mathbf{B}_f dans le cas d'un problème magnétostatique linéaire en se basant sur un calcul d'énergie magnétique. Dans le domaine continu, l'énergie magnétique W_{mag} stockée dans un matériau caractérisé par une loi de comportement linéaire $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ est déduite de la relation suivante :

$$W_{mag} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{H} \mathbf{B}^t d\mathcal{D} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \mathbf{B}^t d\mathcal{D}$$
 (F.21)

en remplaçant ${\bf B}$ par sa forme discrète 7.9, l'expression devient :

$$W_{mag}^{1} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{B}_{f}^{t} \mathbf{W}_{f} \left(\mathbf{B}_{f}^{t} \mathbf{W}_{f} \right)^{t} d\mathcal{D} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{B}_{f}^{t} \mathbf{W}_{f} \mathbf{W}_{f}^{t} \mathbf{B}_{f} d\mathcal{D}$$
 (F.22)

On introduit alors la matrice de masse $\mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}}$ de dimension $n_f \times n_f$ telle que ces coefficients $m_{ff}^{\mu^{-1}}$ s'écrivent :

$$m_{ff}^{\mu^{-1}} = \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{w}_f \mathbf{w}_{f'} d\mathcal{D} \quad \text{avec} \quad 1 \le f \le n_f \quad \text{et} \quad 1 \le f' \le n_f$$
 (F.23)

L'énergie magnétique s'écrit alors :

$$W_{mag}^{1} = \frac{1}{2} \mathbf{B}_{f}^{t} \mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}} \mathbf{B}_{f}$$
 (F.24)

Une autre manière d'introduire l'énergie magnétique dans le domaine discret est de considérer que celle-ci est donnée par :

$$W_{mag}^2 = \frac{1}{2} \mathbf{B}_f \tilde{\mathbf{H}}_a^t \tag{F.25}$$

Si l'on souhaite que W^1_{mag} et W^2_{mag} soient égaux pour tout vecteur \mathbf{B}_f , on a alors :

$$\tilde{\mathbf{H}}_a = \mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}} \mathbf{B}_f \tag{F.26}$$

De cette manière, une loi de comportement liant $\tilde{\mathbf{H}}_a$ et \mathbf{B}_f est établie.

Il est également possible de déterminer une loi de comportement discrète si on connaît les fonctions d'interpolation sur le maillage dual. Une démarche similaire à celle présentée précédemment est utilisée, l'énergie magnétique est alors exprimée en fonction du champ magnétique (équation F.21). Cette démarche conduit à :

$$\mathbf{B}_f = \mathbf{M}^{\mu_{\tilde{a}\tilde{a}}} \tilde{\mathbf{H}}_a \tag{F.27}$$

$$m^{\mu_{\tilde{a}\tilde{a}}} = \int_{\mathcal{D}} \mu \tilde{\mathbf{w}}_a \tilde{\mathbf{w}}_{a'} d\mathcal{D} \quad \text{avec} \quad 1 \le a \le n_{\tilde{a}} \quad \text{et} \quad 1 \le a' \le n_{\tilde{a}}$$
 (F.28)

avec $\mathbf{M}^{\mu_{\tilde{a}\tilde{a}}}$ de dimension $n_{\tilde{a}} \times n_{\tilde{a}}$ de \tilde{M} .

De la même manière, en se basant sur un calcul d'énergie électrique, la relation liant \mathbf{E}_a et $\tilde{\mathbf{J}}_f$ est donnée par :

$$\tilde{\mathbf{J}}_f = \mathbf{M}_{aa}^{\sigma} \mathbf{E}_a \tag{F.29}$$

avec \mathbf{M}_{aa}^{σ} , de dimension $n_a \times n_a$ de M, dont les coefficients m_{aa}^{σ} sont donnés par :

$$m_{aa}^{\sigma} = \int_{\mathcal{D}} \sigma \mathbf{w}_a \mathbf{w}_{a'} d\mathcal{D} \quad \text{avec} \quad 1 \le a \le n_a \quad \text{et} \quad 1 \le a' \le n_a$$
 (F.30)

Si les fonctions d'interpolation sont linéairement indépendantes, alors ces matrices, dites de masse, sont inversibles. On peut donc ainsi indifféremment lier \mathbf{B}_f à $\tilde{\mathbf{H}}_a$ (respectivement \mathbf{E}_a à $\tilde{\mathbf{J}}_e$) et inversement.

F.5 Formulations discrètes

En utilisant les équations de Maxwell discrétisées et les matrices de masse, un diagramme de Tonti discret peut être obtenu (fig. F.6). Celui-ci est la reproduction dans le domaine discret du diagramme de Tonti associé au domaine continu.

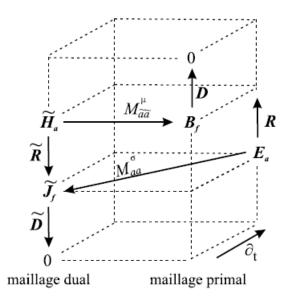


Figure F.6 – Diagramme de Tonti discret

Sur ce diagramme, nous pouvons remarquer que les matrices de masse "font le lien" entre les suites d'espaces définis sur le maillage primal et le maillage dual.

Dans la suite, en utilisant les matrices d'incidence et de masse, nous développerons les formulations discrètes en potentiels permettant de résoudre des problèmes magnétodynamiques, magnétostatiques et électrocinétiques. Nous nous plaçons dans les mêmes conditions qu'au chapitre 2. Nous rappelons qu'un domaine conducteur \mathcal{D}_c , supposé contractile, est contenu dans le domaine \mathcal{D} et que la seule source de champs est constituée d'un inducteur bobiné dont la densité de courant est noté \mathbf{J}_s . Dans ces conditions, comme dans le domaine continu, la forme locale du théorème d'Ampère s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{H}}_{a} = \tilde{\mathbf{J}}_{find} + \tilde{\mathbf{J}}_{fs} \tag{F.31}$$

avec
$$\tilde{\mathbf{J}}_{find} = M_{aa}^{\sigma} \mathbf{E}_{a}, \ \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{H}}_{as} = \tilde{\mathbf{J}}_{fs} \text{ et } \tilde{\mathbf{J}}_{fs} = \mathbf{M}_{as} \tilde{\mathbf{J}}_{fs}$$
 (F.32)

avec $\tilde{\mathbf{J}}_{find}$, l'ensemble des flux de la densité de courant induite à traves les facettes duales de \mathcal{D}_c ; $\tilde{\mathbf{J}}_{fs}$, l'ensemble des flux de \mathbf{J}_s à travers les facettes de \tilde{M} ; et, \mathbf{H}_{as} , l'ensemble des circulations du champ source \mathbf{H}_s sur les arêtes duales.

F.5.1 Discrétisation de la densité de courant

Selon le besoin de la formulation choisie, la densité de courant \mathbf{J}_s est soit discrétisée sur le maillage primal ou soit sur le maillage dual. Dans le cas où l'on souhaite avoir la densité de courant sur le maillage dual, la répartition de densité de courant \mathbf{J}_s est déterminée sur le maillage primal puis projetée sur le dual par l'intermédiaire de la matrice \mathbf{M}_{af} .

Dans la littérature, plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour le calcul de la densité de courant \mathbf{J}_s pour un inducteur de forme donnée. Cela peut s'effectuer directement, par l'intermédiaire d'un potentiel ou bien encore par un champ source \mathbf{H}_s tel que $\mathbf{rot}\mathbf{H}_s = \mathbf{J}_s$ [Nakata et al, 1988]. Par cette relation, la densité de courant est implicitement conservée. Dans le cas d'un inducteur bobiné de forme simple, la densité \mathbf{J}_s peut être déterminée analytiquement. Pour des inducteurs filaires, la loi de Biot et Savart peut être utilisée pour le calcul d'un champ source. Par contre, pour des inducteurs volumiques, cette méthode s'avère être inadaptée. Néanmoins, celle-ci permet de prendre en compte des inducteurs sans les mailler explicitement [Mayergoyz 1983], [Biro, Preis 2000].

Pour d'autres méthodes, un potentiel vecteur est calculé en minimisant la quantité $(\mathbf{rotH}_s - \mathbf{J}_s)^2$ dans un sous-domaine de \mathcal{D} par un calcul éléments finis [Golovanov 1997], [Ren 1996b]. Celui-ci doit évidemment contenir l'inducteur tout en ne contenant pas de "trou". Dans le cas d'inducteurs bobinés de forme complexe, la détermination automatique de ce sous-domaine peut être difficile à construire, dans ce cas, le calcul de \mathbf{H}_s s'effectue dans tout le domaine. Il a aussi été proposé des méthodes ayant recours à une résolution par un calcul éléments finis d'un problème d'électrocinétique [Kawase et al 1998], [Le Floch 2002]. En considérant une conductivité électrique tensorielle, une densité \mathbf{J}_s , à répartition uniforme dans l'inducteur, peut être déterminée [Dular et al 1996].

D'autre part, il existe des méthodes basées sur des techniques d'arbre pour calculer directement la densité de courant \mathbf{J}_s et son champ source \mathbf{H}_s associé [Le Menach 1999]. On introduit ainsi deux champs de vecteurs tel que :

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{N}\,i\tag{F.33}$$

$$\mathbf{H}_s = \mathbf{K} i \tag{F.34}$$

$$\mathbf{rot}\mathbf{K} = \mathbf{N} \tag{F.35}$$

avec i le courant, \mathbf{N} défini dans l'inducteur et discrétisé sur \mathbf{W}^2 et \mathbf{K} défini dans tout le domaine et discrétisé sur \mathbf{W}^1 . De tels champs sont respectivement obtenus par une technique d'arbre de facettes et d'arêtes. Le développement de ces arbres est donné en annexe \mathbf{G} . La géométrie de l'inducteur est implicitement prise en compte par \mathbf{N} tel que :

$$\mathbf{N} = \frac{1}{S_{ind}}.\mathbf{n} \tag{F.36}$$

avec S_{ind} la section de l'inducteur et \mathbf{n} sa normale. Si on considère un domaine \mathcal{D} incluant un inducteur bobiné comme précisé sur la figure $\mathbf{F}.7$, la répartition de \mathbf{N} est donnée par la figure $\mathbf{F}.8$.

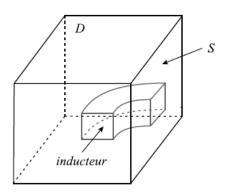


Figure F.7 – Exemple d'inducteur bobiné

Il a été montré que le choix de l'arbre de facettes utilisé pour le calcul de ${\bf N}$ induit des erreurs numériques beaucoup plus faible que celles dues à la discrétisation [Le Menach 1999], [Le Menach et al 2000].

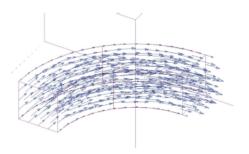


Figure F.8 – Répartition deN

Par une technique d'arbre d'arêtes, une infinité de champs \mathbf{K} peuvent être calculés tels que leur rotationnel soit égal à \mathbf{N} . Néanmoins, la répartition du champ magnétique n'en dépend pas. Les figures $\mathbf{F}.9$ et $\mathbf{F}.10$ donnent deux exemples de champ \mathbf{K} sur une surface \mathbf{S} du domaine comme précisée sur la figure $\mathbf{F}.7$.

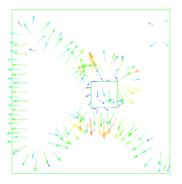


Figure F.9 – Exemple 1

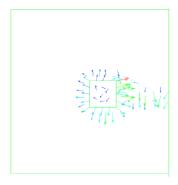


Figure F.10 – Exemple 2

F.5.2 Problème magnétodynamique

Comme dans le domaine continu, deux formulations peuvent être utilisées pour résoudre ce type de problème : la formulation électrique $\mathbf{A} - \phi$ et la formulation magnétique $\mathbf{T} - \Omega$. La formulation $\mathbf{A} - \phi$ sera résolue sur le maillage primal et la formulation $\mathbf{T} - \Omega$ sur le maillage dual sachant, comme nous l'avons précisé précédemment, qu'une inversion est parfaitement envisageable. En

pratique, la méthode des éléments finis conduit à résoudre les deux formulations sur le maillage primal.

F.5.2.1 Formulation électrique A - φ

L'expression de l'induction magnétique et du champ électrique, exprimés en fonction de potentiels dans le domaine continu, restent valables dans le domaine discret. Celles-ci s'écrivent :

$$\mathbf{B}_f = \mathbf{R}\mathbf{A}_a \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_a = -\frac{\partial \mathbf{A}_a}{\partial t} - \mathbf{G}\boldsymbol{\varphi}_n$$
 (F.37)

avec \mathbf{A}_a les circulations sur les arêtes primales de \mathbf{A} et φ_n les valeurs du potentiel scalaire électrique φ aux noeuds primals de \mathcal{D}_c . Pour assurer l'unicité de \mathbf{A}_a , il est nécessaire d'introduire une jauge. Une jauge de type $\mathbf{A}.\mathbf{W}=0$ peut être appliquée très simplement si le potentiel vecteur \mathbf{A} est décomposé dans l'espace des éléments d'arête. Celle-ci peut être obtenue par une technique d'arbre, un arbre d'arêtes ne formant pas de boucles et reliant tous les noeuds de \mathbf{D}_c peut être déterminé.

L'ensemble des arêtes de l'arbre ne sont plus considérées comme des degrés de liberté, la valeur de la circulation de **A** sur ces arêtes est annulée. Par conséquent, le nombre de degrés de liberté du potentiel **A** est diminué. Le système d'équations associé à cette formulation est donné par la discrétisation des équations relatives au domaine continu. Celui-ci s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}}\mathbf{R}\mathbf{A}_{a} + \mathbf{M}_{aa}^{\sigma} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_{a}}{\partial t} + \mathbf{G}\boldsymbol{\varphi}_{n}\right) = 0$$
 (F.38)

$$\tilde{\mathbf{D}}\mathbf{M}_{aa}^{\sigma} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_{a}}{\partial t} + \mathbf{G}\boldsymbol{\varphi}_{n} \right) = 0$$
 (F.39)

En utilisant les propriétés des opérateurs discrets, le système devient :

$$\begin{vmatrix} \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}} \mathbf{R} + \mathbf{M}_{aa}^{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} & \mathbf{M}_{aa}^{\sigma} \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^{t} \mathbf{M}_{aa}^{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} & \mathbf{G}^{t} \mathbf{M}_{aa}^{\sigma} \mathbf{G} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{a} \\ \boldsymbol{\varphi}_{n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$
(F.40)

Le terme de gauche représentant la matrice de raideur n'est pas symétrique. En utilisant une méthode de discrétisation temporelle appropriée, cette matrice peut vérifier cette propriété. Le développement de la symétrisation sera donné dans la suite. La matrice de raideur obtenue n'est pas inversible si l'on n'utilise pas de jauge. Pour résoudre ce système, des méthodes itératives sont alors utilisées comme la méthode du gradient conjugué. On montre qu'avec ce type de processus itératif de résolution, le potentiel vecteur A est implicitement jaugé, le processus est ainsi convergent [Kameari, Koganezawa 1997], [Johnson 1987], [Fujiwara et al 1993], [Ren et al 1990]. La formulation discrète précédente a un caractère général. En utilisant les matrices d'incidence introduite plus haut avec les fonctions d'interpolation données précédemment, nous obtenons la même formulation donnée par la méthode des éléments finis et la méthode des résidus pondérés, comme cela est montré en annexe H. Nous retrouvons donc bien ici le fait que l'utilisation d'un maillage dual est implicite dans la méthode des éléments finis.

F.5.2.2 Formulation électrique T - Ω

L'expression discrète du champ magnétique et de la densité de courant induite est donnée par :

$$\tilde{\mathbf{H}}_a = \tilde{\mathbf{H}}_{as} + \tilde{\mathbf{T}}_a - \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{\Omega}}_n$$
 (F.41)

$$\tilde{\mathbf{J}}_f = \tilde{\mathbf{R}} \left(\tilde{\mathbf{T}}_a + \tilde{\mathbf{H}}_{as} \right) \tag{F.42}$$

avec $\tilde{\mathbf{H}}_{as}$ et $\tilde{\mathbf{T}}_a$ les circulations respectives de \mathbf{H}_s et de \mathbf{T} sur les arêtes duales et Ω_n les valeurs du potentiel Ω sur les noeuds duaux.

Le système d'équations associé à cette formulation est donné par la discrétisation des équations relatives au domaine continu. Celui-ci s'écrit :

$$\mathbf{R}\mathbf{M}_{\widetilde{f}f}^{\sigma^{-1}}\widetilde{\mathbf{R}}\widetilde{\mathbf{T}}_{a} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{M}_{\widetilde{a}a}^{\mu}\left(\widetilde{\mathbf{T}}_{a} - \widetilde{\mathbf{G}}\widetilde{\mathbf{\Omega}}_{n}\right) = -\mathbf{R}\mathbf{M}_{\widetilde{f}f}^{\sigma^{-1}}\widetilde{\mathbf{R}}\widetilde{\mathbf{H}}_{as} - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{M}_{\widetilde{a}a}^{\mu}\widetilde{\mathbf{H}}_{as}$$
(F.43)

$$\mathbf{D}\mathbf{M}_{\widetilde{a}\widetilde{a}}^{\mu}\left(\widetilde{\mathbf{T}}_{a}-\widetilde{\mathbf{G}}\widetilde{\mathbf{\Omega}}_{n}\right)=-\mathbf{D}\mathbf{M}_{\widetilde{a}\widetilde{a}}^{\mu}\widetilde{\mathbf{H}}_{as}\tag{F.44}$$

En utilisant les propriétés des opérateurs discrets, le système devient :

$$\begin{vmatrix} \widetilde{\mathbf{R}}^{t} \mathbf{M}_{\widetilde{f}\widetilde{f}}^{\sigma^{-1}} \widetilde{\mathbf{R}} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{M}_{\widetilde{a}\widetilde{a}}^{\mu} & -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{M}_{\widetilde{a}\widetilde{a}}^{\mu} \widetilde{\mathbf{G}} \\ \widetilde{\mathbf{G}}^{t} \mathbf{M}_{\widetilde{a}\widetilde{a}}^{\mu} & -\widetilde{\mathbf{G}}^{t} \mathbf{M}_{\widetilde{a}\widetilde{a}}^{\mu} \widetilde{\mathbf{G}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \widetilde{\mathbf{T}}_{a} \\ \widetilde{\mathbf{\Omega}}_{n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\mathbf{R} \mathbf{M}_{\widetilde{f}\widetilde{f}}^{\sigma^{-1}} \widetilde{\mathbf{R}} \widetilde{\mathbf{H}}_{as} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{M}_{\widetilde{a}\widetilde{a}}^{\mu} \widetilde{\mathbf{H}}_{as} \\ -\widetilde{\mathbf{G}}^{t} \mathbf{M}_{\widetilde{a}\widetilde{a}}^{\mu} \widetilde{\mathbf{H}}_{as} \end{vmatrix}$$
(F.45)

On ne voit apparaître ici que des grandeurs définies sur le maillage dual dans le terme de droite (la densité de courant J_s) ce qui est normal puisque la seule source de champ est définie sur le

Comme pour la formulation précédente, si on appliquait la méthode des résidus pondérés, le système matriciel obtenu serait semblable à celui donné précédemment.

Problème magnétostatique

En magnétostatique, la discrétisation du système d'équations présenté plus haut s'écrit sous la forme:

$$\widetilde{\mathbf{R}}\widetilde{\mathbf{H}}_a = \widetilde{\mathbf{J}}_{fs} \tag{F.46}$$

$$\mathbf{DB}_f = 0 \tag{F.47}$$

$$\widetilde{\mathbf{H}}_a = \mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}} \mathbf{B}_f \tag{F.48}$$

Dans le cas de la formulation A, nous obtenons :

$$\mathbf{R}^{t}\mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}}\mathbf{R}\mathbf{A}_{aa} = \widetilde{\mathbf{J}}_{fs} \text{ avec } \mathbf{B}_{f} = \mathbf{R}\mathbf{A}_{a}$$
 (F.49)

Dans le terme de droite apparaît une grandeur liée au maillage dual. Toutefois, on peut obtenir un système ne faisant intervenir que des grandeurs liées au maillage primal. Ainsi, le système s'écrit :

$$\mathbf{R}^{t}\mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}}\mathbf{R}\mathbf{A}_{aa} = \mathbf{M}_{af}\mathbf{J}_{s} \text{ avec } \mathbf{B}_{f} = \mathbf{R}\mathbf{A}_{a}$$
 (F.50)

Dans le cas de la formulation Ω , le système à résoudre s'écrit :

$$\widetilde{\mathbf{G}}\mathbf{M}_{\widetilde{a}\widetilde{a}}^{\mu}\widetilde{\mathbf{G}}\widetilde{\Omega}_{n} = \widetilde{\mathbf{G}}\mathbf{M}_{\widetilde{a}\widetilde{a}}^{\mu}\widetilde{H}_{as} \text{ avec } \widetilde{H}_{a} = \widetilde{H}_{as} - \widetilde{\mathbf{G}}\widetilde{\Omega}_{n}$$
 (F.51)

F.5.4Problème électrocinétique

En électrocinétique, le système à résoudre est donné par la discrétisation des équations présentées plus haut.

$$\mathbf{RE}_a = 0 \tag{F.52}$$

$$\widetilde{\mathbf{D}}\widetilde{\mathbf{J}}_{find} = 0$$

$$\widetilde{\mathbf{J}}_{find} = \mathbf{M}_{aa}^{\sigma}\mathbf{E}_{a}$$
(F.54)

$$\mathbf{J}_{find} = \mathbf{M}_{aa}^{\sigma} \mathbf{E}_{a} \tag{F.54}$$

Dans le cas de la formulation T, le système d'équations s'écrit sous la forme :

$$\widetilde{\mathbf{R}} \mathbf{M}_{\widetilde{f}f}^{\sigma^{-1}} \widetilde{\mathbf{R}} \widetilde{\mathbf{T}}_{a} = 0 \text{ avec } \widetilde{\mathbf{J}}_{find} = \widetilde{\mathbf{R}} \widetilde{\mathbf{T}}_{a}$$
 (F.55)

et dans le cas de la formulation φ :

$$\mathbf{G}^{t}\mathbf{M}_{aa}^{\sigma}\mathbf{G}\boldsymbol{\varphi}_{n} = 0 \text{ avec } \mathbf{E}_{a} = -\mathbf{G}\boldsymbol{\varphi}_{n} \tag{F.56}$$

Remarque F.5.1 En pratique le terme de droite représentant le vecteur source n'est pas nul puisque les sources de courant ou de tension sont appliquées par l'intermédiaire des conditions limites que nous n'avons pas considérées ici mais qui le sont plus haut.

F.6 Discrétisation temporelle

Dans le cas des formulations magnétodynamiques, en plus d'une discrétisation spatiale, une discrétisation temporelle doit être introduite. Elle peut être réalisée par un schéma de discrétisation de type Euler implicite. L'intervalle de l'étude a pour durée T, le pas de discrétisation temporel Δt et le nombre de pas de temps N_T avec $N_T = \frac{T}{\Delta t}$. Dans le cas général, deux fonctions sont considérées, une fonction source ou cause f(t) et une fonction réponse ou conséquence u(t) telle que :

$$\frac{du(t)}{dt} + au(t) = f(t) \tag{F.57}$$

En appliquant une méthode de type Euler implicite, l'équation différentielle précédente devient :

$$\frac{u_{tn+1} - u_{tn}}{\Delta t} + au_{tn} = f_{tn} \tag{F.58}$$

avec $t_n = n\Delta t \ (n \in [1, N_t])$ et A une constante.

Suite à la discrétisation temporelle par la méthode d'Euler implicite, les différentes matrices de raideur sont rendues symétriques. A titre d'exemple, la formulation $\mathbf{A} - \varphi$ est développée. En multipliant la dernière ligne de la matrice par Δt , le système matriciel devient :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{R}^{t} \mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}} \mathbf{R} + \frac{M_{aa}^{\sigma}}{\Delta t} & M_{aa}^{\sigma} \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^{t} M_{aa}^{\sigma} & \mathbf{G}^{t} M_{aa}^{\sigma} \mathbf{G} \Delta t \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{a} \\ \boldsymbol{\varphi}_{n} \end{vmatrix}_{t_{n+1}} = \begin{vmatrix} \frac{M_{aa}^{\sigma}}{\Delta t} & 0 \\ \mathbf{G}^{t} M_{aa}^{\sigma} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{a} \\ \boldsymbol{\varphi}_{n} \end{vmatrix}_{t_{n}}$$
 (F.59)

Annexe G

Détermination de champs à rotationnel ou divergence donnée

On considère deux champs : \mathbf{X} (resp. \mathbf{X}_f) et \mathbf{Y} (resp. \mathbf{Y}_a) appartenant respectivement à \mathbf{W}^2 (resp. \mathcal{W}^2) et \mathbf{W}^1 (resp. \mathcal{W}^1). Le champ \mathbf{X} est à flux conservatif et \mathbf{Y} est tel que son rotationnel est égal à \mathbf{X} . On a alors :

$$\mathbf{rot}\mathbf{Y} = \mathbf{X} \quad \mathbf{R}\mathbf{Y}_a = \mathbf{X}_f \tag{G.1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{X} = 0 \quad \mathbf{D} \mathbf{X}_f = 0 \tag{G.2}$$

Pour obtenir des champs qui vérifient les relations précédentes, des techniques d'arbres, basées sur la théorie des graphes, peuvent être utilisées. Dans cette annexe, nous rappelons brièvement la technique utilisée au L2EP et développée par [Le Menach 1999].

G.1 Arbre d'arêtes

Le vecteur \mathbf{X}_f est connu et \mathbf{Y}_a est recherché, celui-ci doit vérifier la relation G.1. Un arbre d'arêtes est construit en réunissant un ensemble d'arêtes ne formant pas de boucles et reliant tous les noeuds du maillage. Les degrés de liberté associés (i.e. les composantes de \mathbf{Y}_a) à cet arbre sont fixés à des valeurs arbitraires qui peuvent être nulles par exemple. Les autres degrés de liberté associés au co-arbre, c'est à dire aux arêtes n'appartenant pas à l'arbre peuvent alors être calculés de manière unique en vérifiant la relation suivante sur chaque facette f du maillage :

$$\int_{f} \mathbf{X} \, df = \oint_{\partial f} \mathbf{Y} \, d\partial f \tag{G.3}$$

On a alors pour chaque facette f, la somme des circulations de $\mathbf Y$ le long des arêtes de f qui est égale au flux de $\mathbf X$ à travers f. Si $(y_a)_{1 \leq a \leq n_a}$ et $(x_f)_{1 \leq f \leq n_f}$ désignent les composantes de $\mathbf Y_a$ et $\mathbf X_f$, on a donc :

$$x_f = \sum_{a=1}^{n_a} y_a \, \delta_a \tag{G.4}$$

avec $\delta_a = +1$ ou -1 si a appartient à la frontière de f et 0 si a n'appartient pas à la frontière de f. On retrouve d'ailleurs la relation G.1.

Pour illustrer cette démarche, nous prenons l'exemple de deux tétrahédres présentés par la figure F.1. On considère un flux unitaire X_2 entrant par la facette 2 et un flux unitaire X_7 sortant par la facette 7. Les flux des autres facettes externes sont fixés à zéro pour que \mathbf{X}_f soit à flux

conservatif. Compte tenu des orientations des facettes, X_2 est égal à 1 et X_7 à -1. Pour calculer \mathbf{Y}_a , compte tenu de la démarche présentée précédemment, un arbre d'arêtes constitué des arêtes 1, 2, 3 et 4 est construit, les degrés de liberté associés à ces arêtes sont fixés à zéro $(Y_1, Y_2, Y_3 \text{ et } Y_4)$. Par conséquent il ne reste plus qu'à calculer les circulations de \mathbf{Y} le long du co-arbre formé par les arêtes de 5 à 9. A titre indicatif les figures $\mathbf{G}.1$ et $\mathbf{G}.2$ illustrent l'arbre et le co-arbre utilisés.

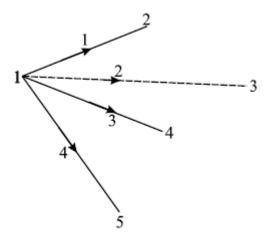


Figure G.1 - Arbre

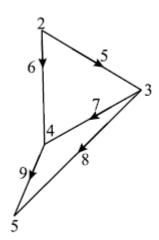


Figure G.2 – Co-arbre

Pour la facette 1, on a :

$$X_1 = Y_1 + Y_5 - Y_2 = 0$$
 on en déduit $Y_5 = 0$ (G.5)

Pour la facette 2 :

$$X_2 = Y_1 + Y_6 - Y_3 = 1$$
 on en déduit $Y_6 = 1$ (G.6)

Pour la facette 3 :

$$X_3 = Y_2 + Y_7 - Y_3 = 0$$
 on en déduit $Y_7 = 1$ (G.7)

et ainsi de suite pour toutes les autres facettes.

Par cette technique, l'ensemble du vecteur \mathbf{Y}_a peut être déterminé de manière itérative et très rapidement. Il est à noter que cette technique n'est applicable qu'avec un champ \mathbf{X} à divergence nulle.

G.2 Arbre de facettes

Comme une facette relie deux éléments de la même manière qu'une arête relie deux noeuds, par analogie, un arbre de facettes peut être déterminé. Un élément e_{ext} représentant l'extérieur du domaine d'étude est ajouté pour prendre en compte le flux sortant de la frontière. Toutes les facettes constituant la frontière du domaine sont alors reliées à cet élément extérieur. Un exemple de cette transposition facette-élément en arête-noeud est donné par la figure G.3 pour l'exemple de la figure F.1.

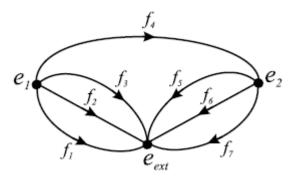


Figure G.3 – Graphe facette-élément

En utilisant le précédent graphe, un arbre (représentant un co-arbre de facettes) peut être calculé. On peut alors fixer les valeurs des flux sur l'arbre de facettes. Les autres flux, à travers les facettes du co-arbre, sont déterminés par une procédure itérative vérifiant la relation G.2.

Un arbre de facettes peut être utilisé pour obtenir un vecteur \mathbf{X}_f ayant une divergence donnée. Pour illustrer la méthode, un exemple en 2D est étudié. Un vecteur \mathbf{X}_f à divergence nulle est recherché dans un sous-domaine \mathcal{D}_X du domaine d'étude constitué de 6 éléments comme précisé par la figure G.4. Ce sous domaine peut représenter un inducteur bobiné ou massif.

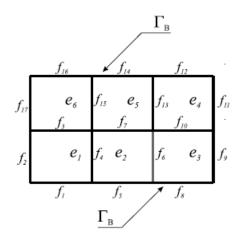


Figure G.4 – Exemple de domaine \mathcal{D}_X

Les deux surfaces extrêmes de \mathcal{D}_X sont en contact avec des conditions limites de type $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$.

Dans un premier temps, un arbre de facettes est construit, celui-ci doit contenir les facettes extérieures à \mathcal{D}_X et celles en contact avec la frontière Γ_B , sauf une pour ne pas former de boucles. La figure G.5 illustre l'arbre et le co-arbre de facettes pour l'exemple étudié. La figure G.6 présente l'arbre et le co-arbre d'arêtes issus de la transposition de la relation facette-élément en arête-noeud.

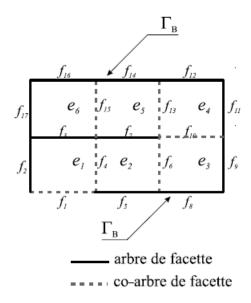


Figure G.5 – Arbre et Co-arbre de facettes

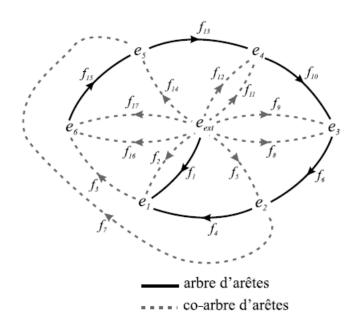


Figure G.6 – Arbre et Co-arbre de facettes issus de la transposition facette-élément en arête-noeud

Par les deux précédentes figures, on constate bien que l'arbre d'arêtes est équivalent au co-arbre de facettes.

Dans un second temps, on impose un flux nul sur les facettes externes au domaine \mathcal{D}_X pour

assurer une divergence nulle, pour l'exemple considéré, on a donc :

$$X_2 = X_9 = X_{11} = X_{17} = 0 (G.8)$$

Sur les autres facettes de l'arbre, le flux est imposé, celui-ci est calculé par :

$$X_f = \int_{S_f} \mathbf{X} \cdot \mathbf{n}_f \, dS_f \tag{G.9}$$

avec S_f l'aire de la facette f et \mathbf{n}_f sa normale. Dans notre cas, les facettes où l'on impose les flux sont f_5 , f_8 , f_{12} , f_{14} et f_{16} .

Dans un dernier temps, il ne reste plus qu'à calculer le flux de ${\bf X}$ à travers les facettes du co-arbre par la vérification de la relation ${\bf G}.2$. Ainsi, par l'élément 6, comme les flux X_{16} et X_3 sont connus, on en déduit le flux X_{15} . Connaissant ce flux, il est alors possible de déterminer X_{13} dans l'élément 5, etc... La détermination des flux sur le co-arbre de facettes est obtenue par une méthode itérative.

 $288ANNEXE\:G.\:\:D\acute{e}TERMINATION\:DE\:CHAMPS\:\grave{A}\:ROTATIONNEL\:OU\:DIVERGENCE\:DONN\acute{e}E$

Annexe H

Formulation A - φ

Dans le cas de la formulation ${\bf A}$ - φ , l'induction magnétique et le champ électrique sont exprimés en fonction de potentiels :

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot}\mathbf{A}$$
 et $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{grad}\varphi$ (H.1)

avec \mathbf{A} , appartenant à \mathbf{W}^1 , le potentiel vecteur magnétique défini dans tout le domaine et φ , appartenant à \mathbf{W}^0 , le potentiel scalaire électrique défini dans le domaine conducteur.

En utilisant les lois de comportement et en remplaçant ${\bf B}$ et ${\bf E}$ par leurs expressions ${\bf H.1}$ dans les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday, nous obtenons le système d'équations à résoudre :

$$\mathbf{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathbf{rot}\mathbf{A}\right) + \sigma\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad}\varphi\right) = \mathbf{J}_{s} \tag{H.2}$$

$$\operatorname{div}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad}\varphi\right) = 0 \tag{H.3}$$

avec J_s , appartenant à W^2 , la densité de courant supposée connue et uniforme dans un inducteur bobiné. Afin de résoudre le système précédent, la méthode des résidus pondérés est utilisée :

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\mathbf{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} \right) + \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) - \mathbf{J}_{s} \right] \cdot \mathbf{u} \, d\mathcal{D} = 0$$
(H.4)

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\operatorname{div} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) \right] v \, d\mathcal{D} = 0 \tag{H.5}$$

avec ${\bf u}$ et v deux fonctions tests appartenant respectivement à ${\bf W}^1$ et à ${\bf W}^0$.

Dans le domaine discret, le potentiel ${\bf A}$ est décomposé dans l'espace des éléments d'arête et φ dans l'espaces des éléments nodaux :

$$\mathbf{A} = \sum_{a=1}^{n_a} A_a \mathbf{w}_a \quad \text{et} \quad \varphi = \sum_{n=1}^{n_n} \varphi_n w_n$$
 (H.6)

où $\mathbf{w}a$ est la fonction d'interpolation associée à l'arête a et w_n la fonction nodale associée au noeud n. La densité de courant source \mathbf{J}_s est décomposée dans l'espace des éléments de facette :

$$\mathbf{J}_s = \sum_{f=1}^{n_f} J_{fs} \mathbf{w}_f \tag{H.7}$$

En utilisant comme fonctions tests, la fonction d'interpolation associée à chaque potentiel 1 et en remplaçant \mathbf{A} , φ et \mathbf{J}_s par leurs formes discrètes, nous obtenons :

$$\sum_{a'=1}^{n_a} \int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{w}_a \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a'} A_{a'} + \sigma \mathbf{w}_a \frac{\partial \mathbf{w}_{a'} A_{a'}}{\partial t} \right] d\mathcal{D} +$$

$$\sum_{n=1}^{n_n} \int_{\mathcal{D}} \sigma \mathbf{w}_a \mathbf{grad} w_n \varphi_n d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{w}_a \sum_{f=1}^{n_f} \mathbf{w}_f J_{fs} d\mathcal{D} \quad \forall a \in [1, n_a]$$
(H.8)

$$\sum_{a=1}^{n_a} \int_{\mathcal{D}} \sigma \mathbf{grad} w_n \frac{\partial \mathbf{w}_a A_a}{\partial t} d\mathcal{D} + \sum_{n'=1}^{n_n} \int_{\mathcal{D}} \sigma \mathbf{grad} w_n \mathbf{grad} w_{n'} \varphi_{n'} d\mathcal{D} = 0 \quad \forall n \in [1, n_n]$$
 (H.9)

Les intégrales sur la frontière Γ s'annulent naturellement par des conditions aux limites homogènes imposées sur les potentiels et les champs. A ce niveau du développement, il est possible de réécrire les équations précédentes par les notions de matrices d'incidence :

$$\mathbf{R}^{t}\mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}}\mathbf{R}\mathbf{A}_{a} + \mathbf{M}_{aa}^{\sigma} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_{a}}{\partial t} + \mathbf{G}\boldsymbol{\varphi}_{n}\right) = \mathbf{M}_{af}\mathbf{J}_{fs}$$
(H.10)

$$\mathbf{G}^{t}\mathbf{M}_{aa}^{\sigma}\frac{\partial\mathbf{A}_{a}}{\partial t}+\mathbf{G}^{t}\mathbf{M}_{aa}^{\sigma}\mathbf{G}\boldsymbol{\varphi}_{n}=0 \tag{H.11}$$

Avec $\mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}}$, \mathbf{M}_{aa}^{σ} et \mathbf{M}_{af} des matrices de masse. Si on considère la matrice \mathbf{M}_{aa}^{σ} , on rappelle que celle-ci est de dimension $n_a \times n_a$ de M, dont les coefficients m_{aa}^{σ} sont donnés par :

$$m_{aa}^{\sigma} = \int_{\mathcal{D}} \sigma \mathbf{w}_a \mathbf{w}_{a'} d\mathcal{D} \text{ avec } 1 \le a \le n_a \text{ et } 1 \le a' \le n_a$$
 (H.12)

avec \mathbf{w}_a la fonction d'interpolation associée à l'arête a.

^{1.} application de la méthode de Galerkin, $u = \mathbf{w}_a$ et $v = w_n$

Annexe I

Recherche de l'élément contenant un point dans code_Carmel

L'algorithme de recherche d'un élément contenant un point, dans code Carmel, est le suivant. Pour un point donné, on parcourt tous les éléments du maillage. Pour un élément donné, on calcule, face par face, le volume signé du tétraèdre formé par trois des nœuds de la face et le point recherché. En calculant le vecteur normal à la face, orienté vers l'intérieur de l'élément, par le produit vectoriel de deux de ses arêtes, correctement choisies, ayant un des trois nœuds en commun. On construit ensuite le vecteur formé par le nœud commun de la face et le point recherché. Puis on réalise le produit scalaire du vecteur normal à la face et le vecteur contenant le point recherché ¹. Si ce résultat est positif, le point peut être à l'intérieur de l'élément. On répète cette opération sur toutes les faces de l'élément. Si tous les résultats sont positifs ², le point appartient à l'élément.

Ci-dessous la mise en pratique sur le cas de la spire circulaire de la recherche du point (0, 0, -0.18) dans les éléments d'indice 227 503 (trouvé) et 198 462 (non trouvé). La face la plus proche du point recherché est constituée des nœuds d'indice 36684, 33046 et 36685. Le volume "signé" du tétraèdre formé par cette face et le point est petit $(4 \times 10^{-8} \text{ m}^3, i.e., \text{ un millième du volume})$ de ces éléments) mais calculable sans erreurs de précision : ce volume change bien de signe de l'élément 198 462 à 227 503. Le point appartient bien à l'élément 227 503 car tous les volumes "signés" calculés entre ce point et chacune des faces de cet élément sont du même signe (négatif). Ce qui n'est pas le cas pour l'élément 198 462. L'hypothèse d'une éventuelle erreur de précision numérique est invalidée (6 chiffres significatifs sur les coordonnées des points seulement, comme le module SMESH de SALOME l'affiche), car nous avons vérifié que la valeur du volume "signé" n'était que peu modifiée (troisième chiffre) et ne changeait en tout cas pas le signe du volume.

Details sur la recherche du point explorateur de coordonnées : 0.00 0.00 -0.18 dans l'élément : 215786 (indice maillage : 227503).

```
Coordonnees des noeuds
1 . (indice maillage : 36684 ) : -5.3093636276877597E-002 -6.4094322793553996E-004 -0.2397908280263570: 2 . (indice maillage : 33046 ) : 2.599286527864698E-003 6.5272437037976194E-002 -0.18818821712945100 3 . (indice maillage : 36666 ) : 1.7567459136458598E-002 -7.738413495515295E-002 -0.2655429493295939 4 . (indice maillage : 36685 ) : 8.4864373823978594E-003 -2.6694983467967399E-002 -0.16581176005213899
                                                                          -5.3093636276877597E-002 -6.4094322793553996E-004 -0.23979082802635701
```

- Calcul du volume signe pour la face 1 définie par les points : 1 2 3 Première arête orientée de la face (P1P2 = nœuds 1 a 2) : 5.5686564929664069E-002 6.5913380265911731E-002 5.1602610896906015E-002 Deuxième arête orientée de la face (P1P3 = nœuds 1 a 3) : 7.0661095413336192E-002 7.8025078181094831E-002 -2.5752121303236980E-002Vecteur normal a la face, oriente vers l'intérieur de l'élément (P1P2 x P1P3) : -5.7237071136938536E-003 5.0803441871928295E-003 3.1256306971144763E-004

- Calcul du volume signé pour la face 2 définie par les points : 1 4 2 Première arête orientée de la face (P1P2 = nœuds 1 a 2) : 6.1580073659275453E-002 -2.6054040240031860E-002 7.3979067974218021E-002 Deuxième arête orientée de la face (P1P3 = nœuds 1 a 3) : 5.5686564929664069E-002 6.5913380265911731E-002 5.1602610896906015E-002
 - 1. Ce résultat correspond à 6 fois le volume "signé" du tétraèdre ainsi formé.
- 2. Dans code_Carmel, ce critère est étendu à : si tous les résultats sont du même signe, soit tous positifs soit tous négatifs à la précision machine près (15 chiffres significatifs), le point appartient à l'élément. Car on constate que les volumes "signés" sont plus souvent tous négatifs que tous positifs tout en ayant la preuve, indépendante, que le point appartient bien à l'élément en question.

292ANNEXE I. RECHERCHE DE L'ÉLÉMENT CONTENANT UN POINT DANS CODE CARMEL

- Vecteur normal a la face, oriente vers l'intérieur de l'élément (P1P2 x P1P3) : -6.2206669399010603E-003 9.4194759213992157E-004 5.5098108154132920E-
- Vecteur défini entre le nœud 1 et le point recherché (P1P) 5.3093636276877597E-002 6.4094322793553996E-004 5.9790828026357018E-002 Produit scalaire normale face et P1P : -2.3794205431372593E-007

- Calcul du volume signé pour la face 3 définie par les points : 1 3 4
 Première arête orientée de la face (P1P2 = nœuds 1 a 2) : 7.0661095413336192E-002 7.8025078181094831E-002 -2.5752121303236980E-002
 Deuxième arête orientée de la face (P1P3 = nœuds 1 a 3) : 6.1580073659275453E-002 -2.6054040240031860E-002 7.3979067974218021E-002
 Vecteur normal a la face, oriente vers l'intérieur de l'element (P1P2 x P1P3) : 5.1012757577521724E-003 -6.8132595074518335E-003 -6.6457970849663371E-003
- $\frac{0.04078706390387112-003}{1.020037112-003} = 0.000037112-003$ Vecteur défini entre le nœud 1 et le point recherché (P1P) 5.3093636276877597E-002 6.4094322793553996E-004 5.9790828026357018E-002 Produit scalaire normale face et P1P : -1.3087934351660875E-004

- Calcul du volume signe pour la face 4 définie par les points : 2 4 3
 Première arête orientée de la face (P1P2 = nœuds 1 a 2) : 5.8935087296113891E-003 -9.1967420505943587E-002 2.2376457077312006E-002
 Deuxième arête orientée de la face (P1P3 = nœuds 1 a 3) : 1.4974530483672128E-002 1.2111697915183101E-002 -7.7354732200142995E-002
 Vecteur normal a la face, orienté vers l'intérieur de l'élément (P1P2 x P1P3) : 6.8430982958427415E-003 7.9096772811908353E-004 1.4485493392644932E-
- 003 -voc-- Vecteur défini entre le nœud 1 et le point recherché (P1P) -2.5929286527864698E-003 -6.5272437037976194E-002 8.1882171294510031E-003 - Produit scalaire normale face et P1P : -5.7511020365228410E-005

Le point explorateur de coordonnées : 0.00 0.00 -0.18 correspond à l'élément : 215786 (indice maillage : 227503)

Détails sur la recherche du point explorateur de coordonnées : 0.00 0.00 -0.18 dans l'élément : 186745 (indice maillage : 198462).

Coordonnées des nœuds

- (indice maillage: 36684): -5.3093636276877597E-002 -6.4094322793553996E-004 -0.23979082802635701 (indice maillage: 33045): -4.2877107273884198E-002 3.3669352879108903E-002 -0.18074067450383599 (indice maillage: 33046): 2.599286537864698E-003 -6.527243703797619-002 -0.18818821712945100 (indice maillage: 36685): 8.4864373823978594E-003 -2.6694983467967399E-002 -0.16581176005213899

- Calcul du volume signé pour la face 1 définie par les points : 1 2 3 Première arête orientée de la face (P1P2 = nœuds 1 a 2) : 1.0216529002993399E-002 3.4310296107044447E-0025.9050153522521021E-002 Deuxième arête orientée de la face (P1P3 = nœuds 1 a 3) : 5.5686564929664069E-002 6.5913380265911731E-002 5.1602610896906015E-002 Vecteur normal a la face, oriente vers l'intérieur de l'élément (P1P2 x P1P3) : -2.1216943641209516E-003 2.7611006373800748E-003 1.2372165707489110E-003 Vecteur défini entre le nœud 1 et le point recherché (P1P) 5.3093636276877597E-002 6.4094322793553996E-004 5.9790828026357018E-002 Produit scalaire normale face et P1P : -1.8485296331716895E-004

- Calcul du volume signé pour la face 2 définie par les points : 1 4 2 Première arête orientée de la face (P1P2 = nœuds 1 a 2) : 6.1580073659275453E-002 -2.6054040240031860E-002 7.3979067974218021E-002 Deuxième arête orientée de la face (P1P3 = nœuds 1 a 3) : 1.0216529002993399E-002 3.4310296107044447E-002 5.9050153522521021E-002 Vecteur normal à la face, oriente vers l'intérieur de l'element (P1P2 x P1P3) : -4.0767388039744112E-003 -2.8805035099353500E-003 2.3790124193007914E-003 P1P3 -- vecteur normal a la face, oriente vers l'interieur de l'element (P1P2 x P1P3) : -4.0/6/388039/44112E-003 -2.8805035099353500E-003 2.3/9012-003 - Vecteur défini entre le nœud 1 et le point recherché (P1P) 5.3093636276877597E-002 6.4094322793553996E-004 5.9790828026357018E-002 - Produit scalaire normale face et P1P : -7.6052004036806842E-005

Calcul du volume signé pour la face 3 définie par les points : 1 3 4

- Calcu du volume signe pour la tace 3 définie par les points : 1 3 4 Première arête orientée de la face (P1P2 = nœuds 1 a 2) : 5.5686564929664069E-002 6.5913380265911731E-002 5.1602610896906015E-002 Deuxième arête orientée de la face (P1P3 = nœuds 1 a 3) : 6.1580073659275453E-002 -2.6054040240031860E-002 7.3979067974218021E-002 Vecteur normal à la face, orienté vers l'intérieur de l'élément (P1P2 x P1P3) : 6.2206669399010603E-003 -9.4194759213992157E-004 5.5098108154132920E-003 Vecteur défini entre le nœud 1 et le point recherché (P1P) 5.3093636276877597E-002 6.4094322793553996E-004 5.9790828026357018E-002 Produit scalaire normale face et P1P : 2.3794205431372593E-007

- Calcul du volume signé pour la face 4 définie par les points : 2 4 3

 Première arête orientée de la face (P1P2 = nœuds 1 a 2) : 5.1363544656282054E-002 -6.0364336347076303E-002 1.4928914451697001E-002

 Deuxième arête orientée de la face (P1P3 = nœuds 1 a 3) : 4.5470035926670670E-002 3.1603084158867291E-002 -7.4475426256150057E-003

 Vecteur normal à la face, orientée vers l'intérieur de l'élément (P1P2 x P1P3) : -2.2233771805698483E-005 1.0613504646951959E-003 4.3680149668614120E-003

 Vecteur défini entre le nœud 1 et le point recherché (P1P) 4.2877107273884198E-002 -3.3669352879108903E-002 7.4067450383599742E-004

 Produit scalaire normale face et P1P : -3.3453025824716477E-005

Annexe J

Librairies d'algèbre linéaire

J.1 Expression du besoin

Compte-tenu de la profusion d'offres et de REXs positifs, la question du recours à une librairie ou à un produit externe est désormais incontournable.

Pourquoi chercher à utiliser ce type de bibliothèque scientifique, en remplacement ou en complément, de nos solutions internes ? Parce que cette stratégie peut s'avérer immédiatement payante en permettant de concilier plusieurs objectifs :

- Objectif économique : des développements moins techniques, moins invasifs et beaucoup plus rapides dans le code hôte. Surtout que ce ne sont généralement pas des développements "cœur de métier".
- Objectif de performance : on aurait beaucoup de mal à faire aussi bien, car ces produits capitalisent des dizaines d'années d'un savoir-faire très pointu d'équipes internationales. Ils conjuguent souvent efficacité, fiabilité, performance et portabilité. Ils permettent d'adresser, à moindre frais, un large périmètre d'utilisation tout en externalisant bon nombres des contingences associées (typologie du problème, représentation et contrôle des données ...).
- Objectif de partage : on bénéficie du retour d'expérience d'une communauté d'utilisateurs variée.
- Objectif de standardisation : on partage le risque avec d'autres utilisateurs quant à la pérennité du produit, mais en retour on bénéficie de la visibilité/reconnaissance que cela procure.
 Et ce, sans compter les aspects « vivier de compétence » pour nos équipes de développement de code.

J.1.1 Gestion de la perte de maîtrise

Par contre, cette perte de maîtrise de ce maillon souvent invisible mais important de la simulation numérique, doit être géré avec clairvoyance. Pour s'avérer payante dans la durée, cette stratégie doit s'accompagner :

- D'un maintien de compétences "numérico-informatiques" en interne pour préconiser le produit idoine, optimiser son usage et l'intégrer dans nos codes. Il faut aussi prévoir, même si ils sont moins importants que pour une solution purement interne, des efforts réguliers pour upgrader/maintenir/valider/documenter ces fonctionnalités. Ces chantiers logiciels périphériques permettent aussi de conserver une certaine crédibilité et réactivité vis-à-vis des équipes académiques.
- Si possible, d'un partenariat avec l'équipe de développement du produit afin d'entretenir des canaux privilégiés d'expertise (pour certains de nos problèmes les plus retords) et d'influencer ces évolutions futurs.



Figure J.1 – Pourquoi utiliser un produit externe en remplacement ou en complément de nos solutions internes?

C'est pour toutes ces raisons que EDF R&D a engagé depuis 7 ans un partenariat très actif avec l'équipe de développement de MUMPS. Cette collaboration a permis de fructueux échanges d'informations (REX, bugs, conseils d'usage, expertises) entre EDF R&D et l'équipe MUMPS. D'autre part, plusieurs fonctionnalités du produit ont été corrigées ou modifiées afin de tenir compte de ces enseignements.

La rapide optimisation des usages de MUMPS dans code_Carmel, et son utilisation intensive dans Code_Aster, sont les fruits directs de cette mutualisation de nos moyens internes et des liens étroits qui nous unissent à l'équipe du produit.



Figure J.2 – Quelques « logos » de bibliothèques d'algèbre linéaire

J.1.2 Une offre riche en librairies d'algèbre linéaire

Depuis l'émergence dans les années 70/80 des premières librairies publics¹ et constructeurs² et de leurs communautés d'utilisateurs, l'offre s'est démultipliée. La tendance étant bien sûr de proposer des solutions performantes (vectoriel, parallélisme à mémoire centralisé puis distribué, parallélisme multiniveau via des threads) ainsi que des " toolkits " de manipulation d'algorithmes d'algèbre linéaire et des structures de données associées. Citons de manière non exhaustive : Sca-LAPACK(Dongarra & Demmel 1997), SparseKIT(Saad 1988), PETSc(Argonne 1991), HyPre(LL 2000), TRILINOS(Sandia 2000)...

Remarque J.1.1 Pour structurer plus efficacement leur utilisation et proposer des solutions « boîte noire » aux équipes codes, des macro-librairies ont vu le jour. Elles regroupent un panel de

^{1.} EISPACK(1974), LINPACK(1976), BLAS(1978) puis LAPACK(1992)...

^{2.} NAG(1971), IMSL/ESSL(IBM 1971), ASL/MathKeisan(NEC), SciLib(Cray), MKL(Intel/Bull), HSL(Harwell), CASI(ANSYS, ABAQUS...) etc.

ces produits auxquels elles rajoutent des solutions « maisons » : Numerical Platon (CEA-DEN), Arcane (CEA-DAM)...

Concernant plus spécifiquement les méthodes directes de résolution de systèmes linéaires qui sont le cœur de cible de notre étude, une trentaine de packages sont disponibles. On distingue les produits "autonomes" de ceux incorporés à une librairie, les publics des commerciaux, ceux traitant des problèmes denses et d'autres des creux. Certains ne fonctionnent qu'en mode séquentiel, d'autres supportent un parallélisme à mémoire partagée et/ou distribuée. Enfin, certains produits sont généralistes (symétrique, non symétrique, SPD, réel/complexe ...) d'autres adaptés à un besoin/scénario bien précis.

DIRECT SOLVERS	License	Support	Real	Complex	F77	С	Seq	Dist	SPD	Gen
DENSE										
<u>FLAME</u>	<u>LGPL</u>	<u>oui</u>	X	X	X	X	X			
LAPACK	BSD	<u>oui</u>	X	X	X	X	X			
LAPACK95	BSD	<u>oui</u>	X	X	95		X			
<u>NAPACK</u>	BSD	<u>oui</u>	X		X		X			
<u>PLAPACK</u>	?	<u>oui</u>	X	X	X	X		M		
PRISM	?	non	X		X		X	M		
<u>ScaLAPACK</u>	BSD	<u>oui</u>	X	X	X	X		M/P		
<u>Trilinos/Pliris</u>	<u>LGPL</u>	<u>oui</u>	X	X		X et C++		M		
SPARSE										
<u>DSCPACK</u>	?	<u>oui</u>	X			X	X	M	X	
<u>HSL</u>	?	<u>oui</u>	X	X	X		X		X	X
MFACT	?	<u>oui</u>	X			X	X	M	X	
MUMPS	PD	<u>oui</u>	X	X	X	X	X	M	X	X
<u>PSPASES</u>	?	<u>oui</u>	X		X	X		M	X	
<u>SPARSE</u>	?	?	X	X		X	X		X	X
<u>SPOOLES</u>	<u>PD</u>	?	X	X		X	X	M		X
<u>SuperLU</u>	<u>Own</u>	<u>oui</u>	X	X	X	X	X	M		X
TAUCS	<u>Own</u>	<u>oui</u>	X	X		X	X		X	X
<u>Trilinos/Amesos</u>	<u>LGPL</u>	<u>oui</u>	X				X	M	X	X
<u>UMFPACK</u>	<u>LGPL</u>	<u>oui</u>	X	X		X	X			X
<u>Y12M</u>	?	<u>oui</u>	X		X		X		X	X

Figure J.3 – Extrait de la page web de Jack Dongarra sur les produits libres implémentant une méthode directe.

On peut trouver une liste assez exhaustive de tous ces produits sur le site d'un des pères fondateurs de LAPACK/BLAS : Jack Dongarra ³. Le tableau ci-dessous en est une version expurgée. Cette ressource internet recense aussi des packages implémentant des solveurs itératifs, des préconditionneurs, des solveurs modaux ainsi que de nombreux produits support (BLAS, LAPACK, ATLAS...).

Remarque J.1.2 Une ressource internet plus détaillée mais focalisée sur les solveurs directs creux est maintenue par un autre grand nom du numérique : T.A.Davis ⁴, un des contributeurs de Matlab.

J.2 Annexe: Compléments théoriques

J.2.1 Espaces de Krylov

L'action du GC peut se résumer en une phrase : "elle réalise des projections orthogonales ⁵ successives sur l'espace de Krylov $\kappa_i(\mathbf{K}, \mathbf{r^0}) := vect(\mathbf{r^0}, \mathbf{K} \mathbf{r^0}, ... \mathbf{K} \mathbf{r^{i-1}})$ où $\mathbf{r^0}$ est le résidu initial".

^{3.} http://www.netlib.org/utk/people/JackDongarra/la-sw.html.

^{4.} http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/codes/.

^{5.} On construit donc une succession d'itérés par projection sur un sous-espace approximant (dit espace de recherche) et perpendiculairement à un autre sous-espace (dit espace de contrainte). Ce cadre général constitue ce qu'on appelle les conditions de Petrov-Galerkin. Ici ces deux sous-espaces sont confondus et égaux à un espace de Krylov.

On résout ainsi le système linéaire (P_1) en recherchant une solution approchée \mathbf{u}^i dans le sous-espace affine (espace de recherche de dimension N) :

$$\mathcal{A} = \mathbf{r}^{0} + \kappa_{i} \left(\mathbf{K}, \mathbf{r}^{0} \right) \tag{J.1}$$

tout en imposant la contrainte d'orthogonalité (espace des contraintes de dimension N) :

$$\mathbf{r}^{i} := \mathbf{f} - \mathbf{K} \, \mathbf{u}^{i} \perp \kappa_{i} \left(\mathbf{K}, \mathbf{r}^{0} \right) \tag{J.2}$$

Cet espace de Krylov a la bonne propriété de faciliter l'approximation de la solution, au bout de m itérations, sous la forme :

$$\mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} \approx \mathbf{u}^m = \mathbf{r}^0 + P_{m-1} \left(\mathbf{K} \right) \mathbf{f} \tag{J.3}$$

où P_{m-1} est un certain polynôme matriciel d'ordre m-1. En effet, on montre que les résidus et les directions de descente engendrent cet espace :

$$vec\left(\mathbf{r}^{0}, \mathbf{r}^{1}, ..., \mathbf{r}^{m-1}\right) = \kappa_{m}\left(\mathbf{K}, \mathbf{r}^{0}\right)$$

$$vec\left(\mathbf{d}^{0}, \mathbf{d}^{1}, ..., \mathbf{d}^{m-1}\right) = \kappa_{m}\left(\mathbf{K}, \mathbf{r}^{0}\right)$$
(J.4)

tout en permettant à la solution approchée, \mathbf{u}^m , de minimiser la norme en énergie sur tout l'espace affine \mathcal{A} :

$$\|\mathbf{u}^m\|_{\mathbf{K}} < \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{K}} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{A} \tag{J.5}$$

Ce résultat joint illustre toute l'optimalité du GC : contrairement aux méthodes de descente, le minimum d'énergie n'est pas réalisé successivement pour chaque direction de descente \mathbf{d}^i , mais conjointement pour toutes les directions de descente déjà obtenues.

Remarque J.2.1 On distingue une grande variété de méthodes de projection sur des espaces de type Krylov, appelées plus prosaïquement " méthodes de Krylov". Pour résoudre des systèmes linéaires (GC, GMRES, FOM/IOM/DOM, GCR, ORTHODIR/MIN ...) et/ou des problèmes modaux (Lanczos, Arnoldi ...). Elles diffèrent par le choix de leur espace de contrainte et par celui du préconditionnement appliqué à l'opérateur initial pour constituer celui de travail, sachant que des implantations différentes conduisent à des algorithmes radicalement distincts (version vectorielle ou par blocs, outils d'orthonormalisation ...).

J.2.2 Orthogonalité

Comme on l'a déjà signalé, les directions de descentes sont K-orthogonales entre elles. De plus, le choix du paramètre de descente optimal (cf. paragraphe 15.2.1 ou étape (2) de l'algorithme 15.1) impose, de proche en proche, les orthogonalités :

$$\langle \mathbf{d}^i, \mathbf{r}^m \rangle = 0 \quad \forall i < m$$

 $\langle \mathbf{r}^i, \mathbf{r}^m \rangle = 0$ (J.6)

On constate donc une petite approximation dans l'appellation du GC, car les gradients ne sont pas conjugués et les directions conjuguées ne comportent pas que des gradients. Mais ne "chipotons" pas, les ingrédients désignés sont quand même là!

A l'issue de N itérations, deux cas de figures se présentent :

- Soit le résidu est nul $\mathbf{r}^N = 0 \Rightarrow$ convergence.
- Soit il est orthogonal aux N précédentes directions de descente qui constituent une base de l'espace fini d'approximation \mathbb{R}^N (comme elles sont linéairement indépendantes). D'où nécessairement $\mathbf{r}^N = 0 \Rightarrow$ convergence.

Il semblerait donc que le GC soit une méthode directe qui converge en au plus N itérations, c'est du moins ce qu'on a cru avant de le tester sur des cas pratiques! Car ce qui reste vrai en théorie, en arithmétique exacte, est mis à mal par l'arithmétique finie des calculateurs. Progressivement, notamment à cause des erreurs d'arrondi, les directions de descente perdent leurs belles propriétés de conjugaison et la minimisation sort de l'espace requis.

Dit autrement, on résout un problème approché qui n'est plus tout à fait la projection souhaitée du problème initial. La méthode (théoriquement) directe a révélée sa vraie nature! Elle est itérative et donc soumise, en pratique, à de nombreux aléas (conditionnement, point de départ, tests d'arrêt, précision de l'orthogonalité...).

Pour y remédier, on peut imposer lors de la construction de la nouvelle direction de descente une phase de réorthogonalisation. Cette pratique très répandue en analyse modale et en décomposition de domaine peut se décliner sous différentes variantes : réorthogonalisation totale, partielle, sélective ... via toute une panoplie de procédures d'orthogonalisation (GS, GSM, IGSM, Househölder, Givens ...). D'autres solutions palliatives peuvent aussi consister à, périodiquement, recalculer explicitement le résidu (étape (4) de l'algorithme 15.1) ou même, carrément, redémarrer l'algorithme avec pour solution initiale la dernière approximation trouvée. Cependant, si au final elles ne sont pas toujours gagnantes en terme de temps calcul (elles ont un surcoût à compenser), elles accroissent souvent la robustesse du processus.

J.2.3 Convergence

Du fait de la structure particulière de l'espace d'approximation (équation J.3) et de la propriété de minimisation sur cet espace de la solution approchée \mathbf{u}^m (cf. équation J.5), on obtient une estimation de la vitesse de convergence du GC :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^i\|_{\mathbf{K}}^2 = (\omega^i)^2 \|\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}\|_{\mathbf{K}}^2 \text{ avec } \omega^i := \max_{1 \le i \le N} \left(1 - \lambda^i P_{m-1}(\lambda^i)\right)$$
(J.7)

où l'on note $(\lambda^i, \mathbf{v}^i)$ les modes propres de la matrice \mathbf{K} et P_{m-1} un polynôme quelconque de degré au plus m-1. Les fameux polynômes de Tchebycheff, via leurs bonnes propriétés de majoration dans l'espace des polynômes, permettent d'améliorer la lisibilité de ce facteur d'atténuation ω^i . A l'issue de i itérations, au pire, la décroissance s'exprime alors sous la forme

$$\|\mathbf{u}^{i} - \mathbf{u}\|_{\mathbf{K}} \le 2\left(\frac{\sqrt{\eta(\mathbf{K})} - 1}{\sqrt{\eta(\mathbf{K})} + 1}\right)^{2} \|\mathbf{u}^{0} - \mathbf{u}\|_{\mathbf{K}}$$
(J.8)

Elle assure la convergence superlinéaire, c'est-à-dire $\lim_{i\to\infty}\frac{J(\mathbf{u}^{i+1})-J(\mathbf{u})}{J(\mathbf{u}^i-J(\mathbf{u}))}=0$, du processus en un nombre d'itérations proportionnel à la racine carré du conditionnement de l'opérateur.

Ainsi, pour obtenir:

$$\frac{\|\mathbf{u}^{i} - \mathbf{u}\|_{\mathbf{K}}}{\|\mathbf{u}^{0} - \mathbf{u}\|_{\mathbf{K}}} \le \varepsilon \text{ (petit)}$$
(J.9)

il faut un nombre d'itérations de l'ordre de

$$i \approx \frac{\sqrt{\eta(\mathbf{K})}}{2} \ln \frac{2}{\varepsilon}$$
 (J.10)

Par exemple sur le cas-test du cube de Rubinacci traité avec Code_Carmel v1.7.6, on a les nombre d'itérations suivantes (suivant le préconditionneur utilisé et la précision ε souhaitée) :

On constate que si les nombres d'itérations ne suivent pas rigoureusement les évolutions théoriques prévues par la formule, les ordres de grandeur sont respectés. Cette conformité est d'autant plus vérifiée que le nombre d'itérations est faible, c'est-à-dire que le préconditionneur s'avère efficace. Par exemple, les croissances du nombre d'itérations MUMPS sont plus proches des chiffres attendus que celles de Crout (ou a fortiori du cas sans préconditionneur). Cela s'explique sans doute par l'effet délétère des pertes d'orthogonalité.

Type de préconditionneur	$arepsilon=10^{-3}$	$arepsilon=10^{-6}$	$arepsilon=10^{-9}$
Nombre d'itérations			
théoriques suivant la formule	Référence	X2	X3
J.10			
Sans (TypeSolveurLinéaire=0)	236	567	965
Crout ILU(0) (TypeSolveurLinéaire=1)	45	107	179
MUMPS simple précision relaxé			
(TypeSolveurLinéaire=3	2	4	6
+ mumps_relax = 10^{-3})			

Tableau J.1 – Convergences théorique et effectives du GC sur le cas-test du cube de Rubinacci (Code_Carmel v1.7.6 sur poste calibre 7).

Remarque J.2.2 En pratique, profitant de circonstances particulières, meilleur point de départ et/ou distribution spectrale avantageuse, la convergence du GC peut être bien meilleure que ce que laisse espérer (J.10). Les méthodes de Krylov ayant tendance à débusquer prioritairement les valeurs propres extrêmes, le "conditionnement effectif" de l'opérateur de travail s'en trouve amélioré.

J.2.4 Couts calcul et mémoire

Comme pour la Steepest Descent, la majeure partie du coût calcul (hors préconditionneur, cf. paragraphe 15.2.3) de cet algorithme réside dans l'étape (1), le produit matrice-vecteur. Sa complexité est de l'ordre de $\mathcal{O}(k\,c\,N)$ où c est le nombre moyen de termes non nuls par ligne de \mathbf{K} et k le nombre d'itérations requises à convergence. Pour être beaucoup plus efficace qu'un simple Cholesky (de complexité $\mathcal{O}\left(\frac{N^3}{3}\right)$) il faut donc :

- Bien prendre en compte le caractère creux des matrices issues des discrétisations éléments finis (stockage MORSE, produit matrice-vecteur optimisé ad hoc, format de représentation des données dédié) : $c \ll N$.
- Préconditionner l'opérateur de travail : $c \ll N$.
- Optimiser toutes les étapes, même les plus élémentaires (étapes (3),(4) et (7)), car on va les refaire de nombreuses fois (appels à des fonctions BLAS optimisées, parallélisme ...).

On a déjà fait remarquer que pour un opérateur SPD sa convergence théorique se produit en, au plus, N itérations et proportionnellement à la racine du conditionnement (cf. (J.10)). En pratique, pour de gros systèmes mal conditionnés et plutôt hors périmètre, elle peut être très lente à se manifester. Pour ce qui est de l'occupation mémoire, seul le stockage de la matrice de travail est éventuellement requis $(\mathcal{O}(cN))$ plus quelques vecteurs auxiliaires de travail $(\mathcal{O}(3N))$. En pratique, la mise en place informatique du stockage creux impose la gestion de vecteurs d'entiers supplémentaires : par exemple pour le stockage MORSE utilisé dans Code_Carmel, vecteurs des indices de fin de ligne et des indices de colonnes des éléments du profil. D'où une complexité mémoire effective de $\mathcal{O}((c+3)N)$ réels et $\mathcal{O}(cN+N)$ entiers.

Remarque J.2.3 Ces considérations sur l'encombrement mémoire ne prennent pas en compte les problèmes de stockage d'un éventuel préconditionneur et de l'espace de travail que sa construction peut provisoirement mobiliser.

Remarque J.2.4 Le nombre de termes non nuls paraît relativement faible dans les cas traités avec $Code_Carmel$ (cube de Rubinacci) : $c \approx 10$. Ce caractère très creux, joint à un bon conditionnement ($\eta(\mathbf{K} \propto) 10^6$), peut expliquer la très bonne compétitivité du GCPC en termes de performance. Et ce, même avec un préconditionnement "frustre" de type Jacobi ou ILU(0). A la limite, tant que l'on ne diverge pas ... on accepte d'itérer beaucoup, car ces itérations sont peu coûteuses.

J.3 Annexe : Stratégies de résolution en non-linéaire

J.3.1 Constructions du préconditionneur

Ceci passe par le paramètre reacprecond_methodeNL.

En non-linéaire, on peut tirer aussi un grand avantage de la mutualisation, entre plusieurs dizaines d'itérations du solveur non-linéaire (souvent un algorithme de type Newton), de la construction du préconditionneur ou de la factorisation numérique du solveur direct. Le processus non-linéaire qui opère sur des données approximées peut alors nécessiter plus d'itérations, mais au final, comme celles-ci sont plus rapides, l'utilisateur est souvent gagnant!

Cette stratégie est surtout profitable pour la combinaison la plus coûteuse : GCPC + préconditionneur MUMPS (TypeSolveurLinéaire=3). Avec une valeur strictement positive de ce mot-clé (par exemple 30), on ne recalcule le préconditionneur avec la dernière matrice code_Carmel que si :

- Pour une itération du solveur non-linéaire donnée, le gradient conjugué GCPC a consommé plus de reacprecond_methodeNL itérations. Pour être cohérent, on doit vérifier que le paramètre reacprecond_methodeNL est strictement inférieur à nbIterationMax, sinon ce critère ne sera jamais activé. Un warning prévient l'utilisateur lorsque cette condition n'est pas respectée.
- Cela fait au moins reacprecond_methodeNL itérations du solveur non-linéaire que cette réactualisation n'a pas été opérée.
- Le résidu du solveur non-linéaire augmente au lieu de diminuer .

Elle fonctionne aussi pour les autres préconditionneurs (TypeSolveurLinéaire=1/2, cf. paragraphe 15.2.2.3), mais comme ils sont déjà peu coûteux, les gains en temps s'avèrent souvent modestes.

Avec MUMPS solveur direct (TypeSolveurLinéaire=4), on mutualise aussi l'étape la plus coûteuse, celle de factorisation numérique (et la phase d'analyse qui la précède). On ne la réactualise avec la dernière matrice code Carmel que si :

- Cela fait au moins reacprecond_methodeNL itérations du solveur non-linéaire que cette réactualisation n'a pas été opérée.
- Le résidu du solveur non-linéaire augmente au lieu de diminuer.

Annexe K

Copyright du produit MUMPS

Ce copyright doit être joint à la documentation théorique et/ou au manuel utilisateur de Code_Carmel afin de rappeler la paternité du produit et les conditions de son usage.

```
CERFACS , Toulouse (France) (http://www.cerfacs.fr)
ENSEEIHT-IRIT, Toulouse (France) (http://www.enseeiht.fr)
INRIA (France) (http://www.inria.fr)
PARALLAB , Bergen (Norway) (http://www.parallab.uib.no)
All rights reserved.
Your use or distribution of the package implies that you agree
with this License. Up-to-date copies of the MUMPS package can be
obtained from the Web page http://www.enseeiht.fr/apo/MUMPS/
This package is provided to you free of charge. It was
initially based on public domain software developed during
the European Esprit IV project PARASOL (1996-1999).
THIS MATERIAL IS PROVIDED AS IS, WITH ABSOLUTELY NO WARRANTY
EXPRESSED OR IMPLIED. ANY USE IS AT YOUR OWN RISK.
Permission is hereby granted to use or copy this
package provided that the Copyright and this License is
retained on all copies and that the package is used
under the same terms and conditions. User documentation
of any code that uses this software should include this
complete Copyright notice and this License.
You can modify this code but, at no time shall the right
or title to all or any part of this package pass to you.
All information relating to any alteration or addition made to this package for the purposes of extending the
capabilities or enhancing the performance of this package
shall be made available free of charge to the authors for
any purpose.
You shall acknowledge (using references [1] and [2])
the contribution of this package in any publication
of material dependent upon the use of the package.
You shall use reasonable endeavours to notify
the authors of the package of this publication.
[1] P. R. Amestoy, I. S. Duff and J.-Y. L'Excellent (1998),
Multifrontal parallel distributed symmetric and unsymmetric solvers,
in Comput. Methods in Appl. Mech. Eng., 184, 501-520 (2000).
An early version appeared as a Technical Report ENSEEIHT-IRIT (1998)
and is available at http://www.enseeiht.fr/apo/MUMPS/.
[2] P. R. Amestoy, I. S. Duff, J. Koster and J.-Y. L'Excellent,
A fully asynchronous multifrontal solver using distributed dynamic
scheduling, SIAM Journal of Matrix Analysis and Applications,
Vol 23, No 1, pp 15-41 (2001).
An early version appeared as a Technical Report ENSEEIHT-IRIT,
                  (1999)
RT/APO/99/2
                                                      available
                                and
                                            is
                                                                       at
http://www.enseeiht.fr/apo/MUMPS/.
None of the text from the Copyright notice up to and
including this line shall be removed or altered in any way.
```

COPYRIGHT (c) 1996-2003 P. R. Amestoy, I. S. Duff, J. Koster,

J.-Y. L'Excellent

Figure K.1 – Carte COPYRIGHT de MUMPS.

Annexe L

Passage de l'élément réel à l'élément de référence

L.1 Cas du tétraèdre

L'élément tétraédrique linéaire est défini par 4 nœuds, 6 arêtes et 4 facettes (cf. figure L.1). Les fonctions d'approximation sont considérées sur les nœuds $(n_i, i = 1, 4)$ de l'élément pour les inconnues scalaires et sur les arêtes $(a_i, i = 1, 6)$ pour les inconnues vectorielles.

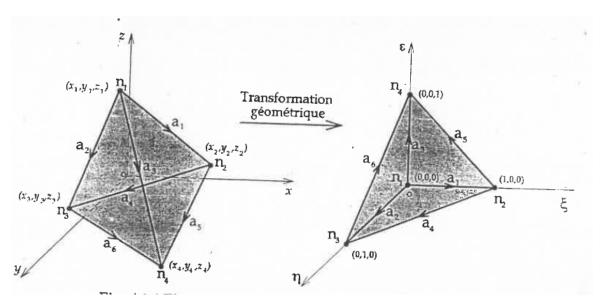


Figure L.1 – Élément tétraédrique linéaire et son élément de référence.

Pour exprimer plus facilement les fonctions d'approximation, l'élément géométrique réel est ramené à un élément de référence. Cela est réalisé par une fonction de transformation bijective du système de coordonnées Oxyz en un système de référence $O\xi\eta\varepsilon$. L'utilisation de cette transformation permet de paramétrer l'élément réel dans le système de référence.

L.2 Fonction d'approximation nodales

Avec une paramétrisation de l'élément réel dans le système de coordonnées de référence les fonctions d'approximation $(\hat{\lambda}_i,\ i=1,4)$ sont données dans la table L.1 :

Nœud i	Fonctions d'approximation $\hat{\lambda}_i$
1	$1 - \xi - \eta - \varepsilon$
2	ξ
3	η
4	ε

Tableau L.1 – Fonctions d'approximation nodale pour un élément de référence

L.3 Fonctions d'approximation d'arête

Pour l'élément de référence, les fonctions d'approximation d'arêtes (\hat{w}_k , k = 1, 6) sont présentées dans le tableau L.2. Une arête k est repérée par deux nœuds i et j :

Arête	Nœuds	Fonctions d'approximation \hat{w}_k			
k	i - j	ξ	η	arepsilon	
1	1 - 2	$1 - \eta - \varepsilon$	ξ	ξ	
2	1 - 3	η	$1-\xi-\varepsilon$	η	
3	1 - 4	ξ	ξ	$1-\xi-\eta$	
4	2 - 3	$-\eta$	ξ	0	
5	2 - 4	$-\varepsilon$	0	ξ	
6	3 - 4	0	$-\varepsilon$	η	

Tableau L.2 – Fonctions d'approximation d'arête pour un élément de référence

L.4 Transformation des dérivées

Les dérivées directionnelles d'une fonction scalaire u définies dans le système de coordonnées réelles et de référence sont reliées par l'expression matricielle suivante :

$$\mathbf{grad}_{\xi\eta\varepsilon}u=\mathbf{J}\,\mathbf{grad}_{xyz}u\quad\mathbf{grad}_{xyz}u=\mathbf{J}^{-1}\,\mathbf{grad}_{\xi\eta\varepsilon}u\tag{L.1}$$

La matrice ${f J}$ est dite matrice jacobienne de l'élément et elle est définie comme suit :

$$\mathbf{J} = \mathbf{grad}\hat{\lambda} [x, y, z] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}$$
(L.2)

On peut montrer aussi que le rotationnel d'une fonction vectorielle \mathbf{u} dans le repère Oxyz est relié à celui défini dans le repère O $\xi\eta\varepsilon$ par :

$$\mathbf{rot}_{xyz}u = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \mathbf{J}^T \mathbf{rot}_{\xi \eta \varepsilon} u \tag{L.3}$$

L.5 Transformation des intégrales

L'intégrale volumique d'une fonction f(x,y,z) sur l'élément réel E est ramenée à une intégrale sur l'élément de référence \hat{E} par la relation suivante :

$$\int_{E} f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_{\hat{E}} f(\xi, \eta, \varepsilon) \, |\det \mathbf{J}| \, d\xi d\eta d\varepsilon \tag{L.4}$$

avec $\det \mathbf{J}$ le déterminant de la matrice \mathbf{J} .

Annexe M

Compléments pour le calcul des forces et du couple

M.1 Tenseur de Maxwell

M.1.1 Cas général

La discrétisation de la formule de Maxwell (17.2) pour le calcul des forces est obtenue en remplaçant l'intégrale de surface par une somme finie sur les " N_e " éléments surfaciques. Le champ magnétique \mathbf{H} est donné par son approximation sur les éléments concernés $\mathbf{H}_e\left(h_x^e,h_y^e,h_z^e\right)$ et la normale sortante pour chaque élément s'exprime par $\mathbf{n}_e\left(n_x^e,n_y^e,n_z^e\right)$. En notant Γ'^e la surface de l'élément, nous obtenons la relations suivante :

$$\mathbf{F} = \mu_0 \sum_{e=1}^{N_e} \Gamma^{\prime e} \left((\mathbf{H}_e \cdot \mathbf{n}_e) \ \mathbf{H}_e - \frac{1}{2} |\mathbf{H}_e|^2 \ \mathbf{n}_e \right)$$
 (M.1)

A partir de cette expression, nous pouvons déduire les composantes de la force $\mathbf{F}^T (F_x F_y F_z)$:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \mu_0 \sum_{e=1}^{N_e} \Gamma'^e \left(\left(H_x^e \, n_x^e + H_y^e \, n_y^e + H_z^e \, n_z^e \right) \, \begin{bmatrix} H_x^e \\ H_y^e \\ H_z^e \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \left(H_x^{e \, 2} + H_y^{e \, 2} + H_y^{e \, 2} \right) \, \begin{bmatrix} n_x^e \\ n_y^e \\ n_z^e \end{bmatrix} \right)$$
 (M.2)

Cette équation peut être réécrite sous la forme :

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \mu_0 \sum_{e=1}^{N_e} \Gamma'^e \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(H_x^{e\,2} - H_y^{e\,2} - H_z^{e\,2} \right) \, n_x^e + H_x^e \, H_y^e \, n_y^e + H_x^e \, H_z^e \, n_z^e \\ \frac{1}{2} \left(H_y^{e\,2} - H_x^{e\,2} - H_z^{e\,2} \right) \, n_y^e + H_x^e \, H_y^e \, n_x^e + H_y^e \, H_z^e \, n_z^e \\ \frac{1}{2} \left(H_z^{e\,2} - H_x^{e\,2} - H_z^{e\,2} \right) \, n_z^e + H_x^e \, H_z^e \, n_x^e + H_y^e \, H_z^e \, n_y^e \end{bmatrix}$$
 (M.3)

En explicitant pour chaque composante de la force, il est possible de se ramener à une écriture matricielle. A titre d'exemple, nous donnons les calculs pour exprimer la composante F_x :

$$F_x = \mu_0 \sum_{e=1}^{N_e} \Gamma'^e \mathbf{H}^{eT} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} n_x^e & 0 & 0 \\ 0 & -n_x^e & 0 \\ 0 & 0 & -n_x^e \end{bmatrix} \mathbf{H}^e + \mathbf{H}^{eT} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ n_y^e & 0 & 0 \\ n_z^e & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{H}^e$$
 (M.4)

Finalement, nous obtenons la relation qui correspond à (17.4):

$$F_{x} = \mu_{0} \sum_{e=1}^{N_{e}} \Gamma^{\prime e} \mathbf{H}^{eT} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} n_{x}^{e} & 0 & 0 \\ n_{y}^{e} & -n_{x}^{e} & 0 \\ n_{z}^{e} & 0 & -n_{x}^{e} \end{bmatrix} \mathbf{H}^{e} = \mu_{0} \sum_{e=1}^{N_{e}} \Gamma^{\prime e} \mathbf{H}^{eT} \mathbf{M}_{\mathbf{x}} \mathbf{H}^{e}$$
 (M.5)

M.1.2 Cas bidimensionnel

M.2 Méthode des travaux virtuels

M.2.1 Dérivée de l'énergie magnétique (formulation en potentiel vecteur

La valeur de la force ou du couple s'obtiennent en dérivant, suivant la direction du déplacement s, l'énergie magnétique à flux constant. La discrétisation est obtenue par une somme sur les éléments déformés avec l'utilisation des circulations du potentiel vecteur c_a^e :

$$F_s = -\frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N_e} c_a^{eT} \, \partial_s \mathbf{S}_a^e \, c_a^e \tag{M.6}$$

Dans le repère de référence, la matrice \mathbf{S}_a^e s'écrit (voir annexe \mathbf{L}) :

$$\mathbf{S}_{a}^{e} = \int_{\hat{\mathcal{D}}^{e}} \frac{1}{\mu_{0}} \left(\frac{1}{\det \mathbf{J}} \mathbf{rot} \hat{w}^{T} \mathbf{J} \right) \cdot \left(\mathbf{J}^{T} \mathbf{rot} \hat{w} \frac{1}{\det \mathbf{J}} \right) |\det \mathbf{J}| \, d\hat{v}$$
(M.7)

avec \hat{w} les fonctions d'approximation d'arête dans le repère de référence.

En dérivant cette matrice par rapport à s, nous obtenons :

$$\begin{split} \partial_{s}S_{a}^{e} &= \frac{\operatorname{sign}\left(\operatorname{det}\mathbf{J}\right)}{\mu_{0}} \int_{\hat{\mathcal{D}^{e}}} \left(\mathbf{rot}\hat{w}^{T}\partial_{s}\mathbf{J}\right) . \left(\mathbf{J}^{T}\,\mathbf{rot}\hat{w}\right) \frac{1}{\operatorname{det}\mathbf{J}} d\hat{v} \\ &+ \frac{\operatorname{sign}\left(\operatorname{det}\mathbf{J}\right)}{\mu_{0}} \int_{\hat{\mathcal{D}^{e}}} \left(\mathbf{rot}\hat{w}^{T}\mathbf{J}\right) . \left(\partial_{s}\mathbf{J}^{T}\,\mathbf{rot}\hat{w}\right) \frac{1}{\operatorname{det}\mathbf{J}} d\hat{v} \\ &+ \frac{\operatorname{sign}\left(\operatorname{det}\mathbf{J}\right)}{\mu_{0}} \int_{\hat{\mathcal{D}^{e}}} \left(\mathbf{rot}\hat{w}^{T}\mathbf{J}\right) . \left(\mathbf{J}^{T}\,\mathbf{rot}\hat{w}\right) \partial_{s} \left(\frac{1}{\operatorname{det}\mathbf{J}}\right) d\hat{v} \quad (M.8) \end{split}$$

Cette expression peut s'écrire aussi :

$$\partial_{s} S_{a}^{e} = \frac{\operatorname{sign} \left(\operatorname{det} \mathbf{J} \right)}{\mu_{0}} \int_{\hat{\mathcal{D}}^{e}} \left(\mathbf{rot} \hat{w}^{T} \mathbf{J} \right) \left(\frac{1}{\operatorname{det} \mathbf{J}} \mathbf{J}^{-1} \partial_{s} \mathbf{J} + \partial_{s} \mathbf{J}^{T} \mathbf{J}^{-1} \frac{1}{\operatorname{det} \mathbf{J}} \right) \left(\mathbf{J}^{T} \mathbf{rot} \hat{w} \right) d\hat{v} + \frac{\operatorname{sign} \left(\operatorname{det} \mathbf{J} \right)}{\mu_{0}} \int_{\hat{\mathcal{D}}^{e}} \left(\mathbf{rot} \hat{w}^{T} \partial_{s} \mathbf{J} \right) \cdot \left(\mathbf{J}^{T} \mathbf{rot} \hat{w} \right) \frac{-1 \operatorname{det} \mathbf{J}}{\left(\operatorname{det} \mathbf{J} \right)^{2}} d\hat{v} \quad (M.9)$$

La dérivée du déterminant de ${f J}$ s'obtient facilement en posant :

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \mathbf{J}' \tag{M.10}$$

avec \mathbf{J}' la matrice transposée des cofacteurs de \mathbf{J} .

Nous pouvons donc écrire :

$$\det \mathbf{J} \ \mathbf{I} = \mathbf{J}' \mathbf{J} \tag{M.11}$$

avec I la matrice identité.

En employant ces relations dans l'expression M.9, nous obtenons :

$$\partial_{s} S_{a}^{e} = \frac{\operatorname{sign}\left(\operatorname{det}\mathbf{J}\right)}{\mu_{0}} \int_{\hat{\mathcal{D}}^{e}} \frac{1}{\left(\operatorname{det}\mathbf{J}\right)^{2}} \left(\operatorname{\mathbf{rot}}\hat{w}^{T}\mathbf{J}\right) \left(\mathbf{J}' \, \partial_{s}\mathbf{J} + \partial_{s}\mathbf{J}^{T} \, \mathbf{J}'^{T} - \partial_{s}\mathbf{J}' \, \mathbf{J}^{T} - \mathbf{J}' \, \partial_{s}\mathbf{J}^{T}\right) \left(\mathbf{J}^{T} \, \operatorname{\mathbf{rot}}\hat{w}\right) \, d\hat{v}$$
(M.12)

Après quelques simplifications, nous obtenons l'expression finale (voir la relation 17.17) de la dérivée de S_a^e définie par les fonctions d'approximation d'arête w dans le repère réel et de la dérivée de la matrice jacobienne :

$$\partial_s S_a^e = \frac{\operatorname{sign} \left(\det \mathbf{J} \right)}{\mu_0} \int_{\hat{\mathcal{D}}_a} \mathbf{rot} \, w^T \, \left[\left(\partial_s \mathbf{J}^T \right) \, \mathbf{J}'^T - \left(\partial_s \mathbf{J}' \right) \mathbf{J} \right] \, \mathbf{rot} \, w \, d\hat{v} \tag{M.13}$$

M.2.2 Dérivée de la co-énergie magnétique (formulation en potentiel scalaire

Dans ce cas, la force ou le couple sont obtenus par une dérivation de la co-énergie magnétique à courant constant. En utilisant les valeurs du potentiel scalaire au niveau des éléments déformés, nous obtenons la forme discrète pour la valeur de la force suivant le déplacement s:

$$F_s = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N_e} \Omega^{eT} \, \partial_s \, S_{\Omega}^e \, \Omega^e \tag{M.14}$$

La matrice S_{Ω^e} s'exprime en utilisant les fonctions d'approximations nodales $\hat{\lambda}$ dans le repère de référence comme suit (cf. annexe L) :

$$S_{\Omega}^{e} = \int_{\hat{\mathcal{D}}_{e}} \mu_{0} \left(\mathbf{grad} \hat{\lambda}^{T} \mathbf{J}^{-1}^{T} \right) \cdot \left(\mathbf{J}^{-1} \mathbf{grad} \hat{\lambda} \right) \left| \det \mathbf{J} \right| d\hat{v}$$
 (M.15)

En introduisant la matrice des cofacteurs transposée $\mathbf{J}',$ la dérivation par rapport à s de l'expression précédente donne :

$$\begin{split} \partial_{s}S_{\Omega}^{e} &= \operatorname{sign}\left(\det\mathbf{J}\right)\,\mu_{0} \int_{\hat{\mathcal{D}}^{e}} \left(\mathbf{grad}\hat{\lambda}^{T}\,\partial_{s}\mathbf{J}'^{T}\right)\,.\,\left(\mathbf{J}'\,\mathbf{grad}\hat{\lambda}\right) \frac{1}{\det\mathbf{J}}\,d\hat{v} \\ &+ \operatorname{sign}\left(\det\mathbf{J}\right)\,\mu_{0} \int_{\hat{\mathcal{D}}^{e}} \left(\mathbf{grad}\hat{\lambda}^{T}\,\mathbf{J}'^{T}\right)\,.\,\left(\partial_{s}\mathbf{J}'\,\mathbf{grad}\hat{\lambda}\right) \frac{1}{\det\mathbf{J}}\,d\hat{v} \\ &+ \operatorname{sign}\left(\det\mathbf{J}\right)\,\mu_{0} \int_{\hat{\mathcal{D}}^{e}} \left(\mathbf{grad}\hat{\lambda}^{T}\,\mathbf{J}'^{T}\right)\,.\,\left(\mathbf{J}'\,\mathbf{grad}\hat{\lambda}\right)\,\partial_{s} \frac{1}{\det\mathbf{J}}\,d\hat{v} \end{split} \tag{M.16}$$

Nous pouvons réécrire cette relation sous la forme :

$$\partial_{s} S_{\Omega}^{e} = \operatorname{sign} \left(\det \mathbf{J} \right) \mu_{0} \int_{\hat{\mathcal{D}}^{e}} \left(\operatorname{\mathbf{grad}} \hat{\lambda}^{T} \mathbf{J}^{\prime T} \right) \cdot \left(\frac{1}{\det \mathbf{J}} \mathbf{J}^{\prime - 1^{T}} \partial_{s} \mathbf{J}^{\prime T} + \partial_{s} \mathbf{J}^{\prime} \mathbf{J}^{\prime - 1} \frac{1}{\det \mathbf{J}} \right) \cdot \left(\mathbf{J}^{\prime} \operatorname{\mathbf{grad}} \hat{\lambda} \right) d\hat{v} \\
+ \operatorname{sign} \left(\det \mathbf{J} \right) \mu_{0} \int_{\hat{\mathcal{D}}^{e}} \left(\operatorname{\mathbf{grad}} \hat{\lambda}^{T} \mathbf{J}^{\prime T} \right) \cdot \left(\mathbf{J}^{\prime} \operatorname{\mathbf{grad}} \hat{\lambda} \right) \frac{-\partial_{s} \left(\det \mathbf{J} \right)}{\left(\det \mathbf{J} \right)^{2}} d\hat{v} \quad (M.17)$$

En remplaçant la dérivée du déterminant par son expression matricielle, nous obtenons (ATTENTION ERREUR DANS LA FORMULE) :

$$\partial_{s} S_{\Omega}^{e} = \operatorname{sign} \left(\det \mathbf{J} \right) \, \mu_{0} \int_{\hat{\mathcal{D}}^{e}} \left(\mathbf{grad} \hat{\lambda}^{T} \, \mathbf{J}^{-1}^{T} \right) \, . \, \left(\mathbf{J}^{T} \, \partial_{s} \mathbf{J}'^{T} + \partial_{s} \mathbf{J}' \, \mathbf{J} - \partial_{s} \mathbf{J}' \, \mathbf{J} - \mathbf{J}' \, \partial_{s} \mathbf{J} \right) \, \left(\mathbf{J}^{-1} \, \mathbf{grad} \hat{\lambda} \right) \, d\hat{v}$$
(M.18)

Finalement, l'utilisation des fonctions d'approximation nodales λ définies dans le repère réel, nous ramène à l'expression suivante (cf. relation 17.22) :

$$\partial_s S_{\Omega}^e = \operatorname{sign} \left(\det \mathbf{J} \right) \, \mu_0 \int_{\hat{\mathcal{D}}^e} \left(\mathbf{grad} \hat{\lambda}^T \right) \, \left(\mathbf{J}^T \, \partial_s \mathbf{J}'^T - \mathbf{J}' \, \partial_s \mathbf{J} \right) \left(\mathbf{grad} \hat{\lambda} \right) \, d\hat{v} \tag{M.19}$$

Pour les deux cas présentés, le calcul de la force ou du couple dépend de l'évaluation de la même expression entre crochets dans les relations M.13 et M.19, c'est-à-dire :

$$(\mathbf{J}^T \, \partial_s \mathbf{J}'^T - \mathbf{J}' \, \partial_s \mathbf{J})$$

A cours du chapitre 17 sur le calcul des forces et du couple, nous avons explicité la dérivation de la matrice jacobienne $\partial_s \mathbf{J}$. Dans le paragraphe suivant, nous allons donner la procédure de calcul de la dérivée de la matrice \mathbf{J}' .

M.2.3 Calcul de la dérivée de la matrice J'

La matrice jacobienne est donnée en fonction des coordonnées de l'élément 1 , dans le repère cartésien $((x_i, y_i, z_i), i = 1, 4)$, par la relation suivante :

$$\mathbf{J} = \mathbf{grad}\hat{\lambda} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{bmatrix}$$
(M.20)

En définissant les vecteurs Δx , Δy et Δz comme suit :

$$\Delta x = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ x_3 - x_1 \\ x_4 - x_1 \end{bmatrix} \Delta y = \begin{bmatrix} y_2 - y_1 \\ y_3 - y_1 \\ y_4 - y_1 \end{bmatrix} \Delta z = \begin{bmatrix} z_2 - z_1 \\ z_3 - z_1 \\ z_4 - z_1 \end{bmatrix}$$
(M.21)

Nous pouvons écrire la matrice J et sa dérivée $\partial_s J$ sous une forme compacte :

$$\mathbf{J} = |\Delta x \, \Delta y \, \Delta z| \quad \partial_s \mathbf{J} = |\partial_s \Delta x \, \partial_s \Delta y \, \partial_s \Delta z| \tag{M.22}$$

En utilisant ces notations, la matrice $\mathbf{J}' = (\det \mathbf{J}) \mathbf{J}'$ et sa dérivée \mathbf{J}' s'écrivent :

$$\mathbf{J}' = |\Delta y \times \Delta z \, \Delta z \times \Delta x \, \Delta x \times \Delta y| \tag{M.23}$$

$$\partial_s \mathbf{J}' = |\partial_s \Delta y \times \Delta z + \Delta y \times \partial_s \Delta z \, \partial_s \Delta z \times \Delta x + \Delta z \times \partial_s \Delta x \, \partial_s \Delta x \times \Delta y + \Delta x \times \partial_s \Delta y| \quad (M.24)$$

A partir de la relation M.24, nous pouvons déduire les dérivées suivant les directions s = (x, y, z):

$$\partial_{s} \mathbf{J}' = \begin{cases} |0 & \Delta z \times \partial_{x} \Delta x & \partial_{x} \Delta x \times \Delta y | \quad s = x \\ |\partial_{y} \Delta y \times \Delta z & 0 & \Delta x \times \partial_{y} \Delta y | \quad s = y \\ |\Delta y \times \partial_{z} \Delta z & \partial_{z} \Delta z \times \Delta x & 0 | \quad s = z \end{cases}$$
(M.25)

pour le calcul du couple, on pose $s = \theta$, ce qui donne :

$$\partial_{\theta} \mathbf{J}' = |\partial_{\theta} \Delta y \times \Delta z \, \Delta z \times \partial_{\theta} \Delta x \, \partial_{\theta} \Delta x \times \Delta y + \Delta x \times \partial_{\theta} \Delta y| \tag{M.26}$$

La valeur des dérivées $\partial_x \Delta x$, $\partial_y \Delta y$, $\partial_z \Delta z$, $\partial_\theta \Delta x$ et $\partial_\theta \Delta y$ définies dans les deux dernières équations, sont obtenues en utilisant le tableau 17.1.

M.2.4 Cas bidimensionnel

^{1.} cas d'un tétraèdre

Index

Symbols		densité de courant source	53, 130
α	26	densité de spires	53 131
$oldsymbol{eta}$	26	description eulérienne	136
,		description lagrangienne	136
Α		discrétisation en temps	98
aimantation	216	divergence discrète	66
aimants	3	domaine conducteur	3, 8, 11
aimants permanents	13	domaine d'étude	3
algèbre linéaire	293	domaine de Weiss	217, 218
analyse dimensionnelle	6	domaine magnétique	218
anisotropie électrique	11	domaine non-conducteur	3, 8, 11
anisotropie magnétique	12		
arbre couvrant	57	E	
arbre d'arêtes	283	électrocinétique 10,	17, 27, 35
arbre de facette	285	éléments de référence overlapping	140
arbre du circuit électrique	57	énergie d'échange	217
ARQS	6, 10	énergie d'anisotropie	218
		énergie magnétique	205
В		énergie magnétostatique	219
bande de mouvement	136	équation de circuit	54, 131
Barkhausen	222	équations de Maxwell	4
basse fréquence	6	espace fonctionnel	39, 40
		espaces de Krylov	295
_			
С		-	
champ électrique	4	F	200
champ électrique champ d'anisotropie	219	flux local	209
champ électrique champ d'anisotropie champ magnétique	219 4	flux local flux magnétique	210
champ électrique champ d'anisotropie champ magnétique co-énergie magnétique	219 4 205	flux local flux magnétique fonctions d'interpolation nodale	210 231
champ électrique champ d'anisotropie champ magnétique co-énergie magnétique condition de jauge	219 4 205 257	flux local flux magnétique	210
champ électrique champ d'anisotropie champ magnétique co-énergie magnétique condition de jauge conditions aux limites	219 4 205 257 4, 5, 14	flux local flux magnétique fonctions d'interpolation nodale force	210 231
champ électrique champ d'anisotropie champ magnétique co-énergie magnétique condition de jauge conditions aux limites conditions de continuité	219 4 205 257 4, 5, 14 5	flux local flux magnétique fonctions d'interpolation nodale force	210 231 202
champ électrique champ d'anisotropie champ magnétique co-énergie magnétique condition de jauge conditions aux limites conditions de continuité conditions de passage	219 4 205 257 4, 5, 14 5 13	flux local flux magnétique fonctions d'interpolation nodale force G Gauss	210 231 202
champ électrique champ d'anisotropie champ magnétique co-énergie magnétique condition de jauge conditions aux limites conditions de continuité conditions de passage conducteur électrique parfait	219 4 205 257 4, 5, 14 5 13 15	flux local flux magnétique fonctions d'interpolation nodale force G Gauss gradient conjugué	210 231 202 118 162
champ électrique champ d'anisotropie champ magnétique co-énergie magnétique condition de jauge conditions aux limites conditions de continuité conditions de passage conducteur électrique parfait conducteur magnétique parfait	219 4 205 257 4, 5, 14 5 13 15 14	flux local flux magnétique fonctions d'interpolation nodale force G Gauss	210 231 202
champ électrique champ d'anisotropie champ magnétique co-énergie magnétique condition de jauge conditions aux limites conditions de continuité conditions de passage conducteur électrique parfait conducteur magnétique parfait	219 4 205 257 4, 5, 14 5 13 15 14 11	flux local flux magnétique fonctions d'interpolation nodale force G Gauss gradient conjugué gradient discret	210 231 202 118 162
champ électrique champ d'anisotropie champ magnétique co-énergie magnétique condition de jauge conditions aux limites conditions de continuité conditions de passage conducteur électrique parfait conducteur magnétique parfait conductivité électrique conservation de la charge électrique	219 4 205 257 4, 5, 14 5 13 15 14 11 5, 7, 8	flux local flux magnétique fonctions d'interpolation nodale force G Gauss gradient conjugué gradient discret	210 231 202 118 162 65
champ électrique champ d'anisotropie champ magnétique co-énergie magnétique condition de jauge conditions aux limites conditions de continuité conditions de passage conducteur électrique parfait conducteur magnétique parfait conductivité électrique conservation de la charge électrique coordonnées barycentriques	219 4 205 257 4, 5, 14 5 13 15 14 11 5, 7, 8 231, 234	flux local flux magnétique fonctions d'interpolation nodale force G Gauss gradient conjugué gradient discret	210 231 202 118 162
champ électrique champ d'anisotropie champ magnétique co-énergie magnétique condition de jauge conditions aux limites conditions de continuité conditions de passage conducteur électrique parfait conducteur magnétique parfait conductivité électrique conservation de la charge électrique coordonnées barycentriques couple	219 4 205 257 4, 5, 14 5 13 15 14 11 5, 7, 8 231, 234 203	flux local flux magnétique fonctions d'interpolation nodale force G Gauss gradient conjugué gradient discret H hexaèdre	210 231 202 118 162 65
champ électrique champ d'anisotropie champ magnétique co-énergie magnétique condition de jauge conditions aux limites conditions de continuité conditions de passage conducteur électrique parfait conducteur magnétique parfait conductivité électrique conservation de la charge électrique coordonnées barycentriques couple courant de maille	219 4 205 257 4, 5, 14 5 13 15 14 11 5, 7, 8 231, 234 203 55	flux local flux magnétique fonctions d'interpolation nodale force G Gauss gradient conjugué gradient discret H hexaèdre	210 231 202 118 162 65
champ électrique champ d'anisotropie champ magnétique co-énergie magnétique condition de jauge conditions aux limites conditions de continuité conditions de passage conducteur électrique parfait conducteur magnétique parfait conductivité électrique conservation de la charge électrique coordonnées barycentriques couple courant de maille courant inducteur	219 4 205 257 4, 5, 14 5 13 15 14 11 5, 7, 8 231, 234 203 55 26	flux local flux magnétique fonctions d'interpolation nodale force G Gauss gradient conjugué gradient discret H hexaèdre I inducteur	210 231 202 118 162 65
champ électrique champ d'anisotropie champ magnétique co-énergie magnétique condition de jauge conditions aux limites conditions de continuité conditions de passage conducteur électrique parfait conducteur magnétique parfait conductivité électrique conservation de la charge électrique coordonnées barycentriques couple courant de maille	219 4 205 257 4, 5, 14 5 13 15 14 11 5, 7, 8 231, 234 203 55	flux local flux magnétique fonctions d'interpolation nodale force G Gauss gradient conjugué gradient discret H hexaèdre I inducteur induction électrique	210 231 202 118 162 65
champ électrique champ d'anisotropie champ magnétique co-énergie magnétique condition de jauge conditions aux limites conditions de continuité conditions de passage conducteur électrique parfait conducteur magnétique parfait conductivité électrique conservation de la charge électrique coordonnées barycentriques couple courant de maille courant inducteur courbe de première aimantation	219 4 205 257 4, 5, 14 5 13 15 14 11 5, 7, 8 231, 234 203 55 26	flux local flux magnétique fonctions d'interpolation nodale force G Gauss gradient conjugué gradient discret H hexaèdre I inducteur induction électrique induction magnétique	210 231 202 118 162 65 110
champ électrique champ d'anisotropie champ magnétique co-énergie magnétique condition de jauge conditions aux limites conditions de continuité conditions de passage conducteur électrique parfait conducteur magnétique parfait conductivité électrique conservation de la charge électrique coordonnées barycentriques couple courant de maille courant inducteur courbe de première aimantation	219 4 205 257 4, 5, 14 5 13 15 14 11 5, 7, 8 231, 234 203 55 26 220	flux local flux magnétique fonctions d'interpolation nodale force G Gauss gradient conjugué gradient discret H hexaèdre I inducteur induction électrique induction magnétique intégration spatiale	210 231 202 118 162 65 110
champ électrique champ d'anisotropie champ magnétique co-énergie magnétique condition de jauge conditions aux limites conditions de continuité conditions de passage conducteur électrique parfait conducteur magnétique parfait conductivité électrique conservation de la charge électrique coordonnées barycentriques couple courant de maille courant inducteur courbe de première aimantation	219 4 205 257 4, 5, 14 5 13 15 14 11 5, 7, 8 231, 234 203 55 26	flux local flux magnétique fonctions d'interpolation nodale force G Gauss gradient conjugué gradient discret H hexaèdre I inducteur induction électrique induction magnétique	210 231 202 118 162 65 110

310 INDEX

intégration sur un rectangle	119	0	
intégration sur un tétraèdre	120	opérateurs de Lagrange	137
intégration sur un triangle	119	opérateurs différentiels discrets	269
_		orientation	67
J		overlapping	259
jauge	71		
jauge de Coulomb	41	Р	
		paroi de Bloch	218
K		perméabilité magnétique	12
K	26	pertes excédentaires	224
_		pertes magnétiques	221
L		pertes par courants induits	223
loi de Faraday	32	pertes par hystérésis	222
loi de Fröhlich	12	phénomènes de propagation	6
loi de Marrocco	12	point explorateur	291
lois de comportement	11	point fixe	145
longueur caractéristique	6	points explorateurs	231
		polarisation magnétique	216
M		potentiel scalaire électrique	18, 23
macro-élément	137	potentiel scalaire magnétique	21, 23
magnétodynamique	10, 22, 32	potentiel vecteur électrique	19, 23
magnétostatique	10, 20, 30, 37	potentiel vecteur magnétique	20, 22
maillage dual	66	prisme	107
Marrocco	265 217	pyramide	113
matériaux diamagnétiques	217		
matériaux ferromagnétiques matériaux paramagnétiques	217	R	
materiaux paramagnetiques matrice jacobienne	231, 265	régimes quasi-stationnaires	6, 10
matrice jacobienne matrices d'incidence	64, 269	relation Euler-Poincaré	61
méthode d'interpolation	137	rotationnel discret	65
méthode des éléments joints	137		
méthode du pas bloqué	136, 137	S	
méthode intégrale	137	schéma d'Euler	98
méthode overlapping	136, 140	solutions en potentiels retardés	6
méthodes directes	176	sources	4
modèle électro-quasistatique	7	surface de glissement	139
modèle magnéto-quasistatique	8	susceptibilité magnétique	216
moment magnétique	216	système linéaire	159
moment orbital	215	.,	
mortar	137	Т	
mouvement	135	tableau de connectivité	139
MUMPS	181	température de Curie	217
mur électrique	14	tenseur de Maxwell	201
mur magnétique	15	tenseul de Maxwell tension appliquée	32
		terme de transport	136
N		tétraèdre	104
N	26	transformation géométrique	232
Newton-Raphson	147	travaux virtuels	203
nombre de Betti	61		_50
non connexité	35	V	
non linéarité numérotation	265 125	volume de l'inducteur	EA 121
numerotation	123	volume de i madeteur	54, 131